Волкова Н.А., Громенко В.М.

Московский государственный открытый университет
имени В.С. Черномырдина

МОДЕЛЬ КУРНО СОТРУДНИЧЕСТВА И КОНКУРЕНЦИИ

Введение. Рассмотрена классическая модель сотрудничества и конкуренции фирм на рынке одного товара, впервые предложенная еще в 1838г. (см. например, [1, 3]) родоначальником математического направления в политической экономии Курно (Антуан Огюст, 1801-1877). Несколько фраз о нем.

Антуан Огюст Курно родился 28 августа 1801 года в городке Гре, департамент Верхняя Сона , в семье обеспеченного негоцианта Клода Курно. С 1809 по 1816 год он учился в местном колледже, который ныне носит его имя, после чего провел четыре года в качестве мелкого служащего в адвокатской конторе и самостоятельно изучал философию.

В 1820 году, в рамках подготовки к вступительным экзаменам в Эколь Нормаль, он работал внештатным преподавателем Королевского колледжа Безансон. В 1821-м Курно был принят в Эколь Нормаль Суперьер, одно из самых престижных высших учебных заведений Франции, где учился вместе с филологом Луи Мари Кишра, издателем Луи Ашеттом и исследователем памятников средневековой литературы Франсуа Жененом. В 1822-м Высшая школа была закрыта по политическим причинам, и в 1823 году Курно получил диплом по математике в Сорбонне.

С 1823 по 1833 год Курно был секретарем маршала Гувион-Сен-Сира, которому помогал писать мемуары, и наставником его сына, одновременно проводя собственные исследования. В 1827 году Курно получил высшее юридическое образование и в 1829 защитил докторскую степень в области математики, со специализацией в механике и астрономии. Тогда же он стал завсегдатаем экономического салона Жозефа Дроза.

Его научные работы заметил знаменитый и влиятельный математик Симеон Де ни Пуассон, при поддержке которого Курно начал карьеру ученого и чиновника: в 1834 году, благодаря Пуассону, Курно был назначен профессором анализа и механики факультета наук в Лионе; с 1835 по 1838 год он занимал должность ректора Академии Гренобля; а с 1836 по 1852 год был генеральным инспектором народного образования. Кроме того, в 1836-м Курно был председателем жюри, отбиравшего в общенациональном конкурсе преподавателей математики. С 1854 по 1862 год он исполнял обязанности ректора Дижонской академии, после чего вышел в отставку по возрасту.

В модели Курно достаточно хорошо можно интерпретировать вопросы сотрудничества между двумя фирмами или организации специального режима работы фирм одного товара.

Модель Курно была предметом многочисленных исследований, самый свежий пример – книга [4], содержащая некоторые результаты по модели Курно.

1.Начала классической модели. Условия работы двух фирм на рынке одного товара. Рассмотрим две фирмы $(i = 1,2)$, выпускающие один и тот же товар. Пусть полные затраты i-й фирмы при выпуске x_i равны $a_i x_i$ (таким образом, a_i есть себестоимость выпуска одной единицы товара). Произведенный обеими фирмами товар поступает на общий рынок. Цена на товар на этом рынке линейно падает в зависимости от поступающего на рынок общего его количества

$$x = x_1 + x_2, \text{ т.е. } p(x) = c - bx, c, b > 0.$$

Такое поведение цены обеспечивает полную распродажу всего поступившего на рынок товара. Для упрощения будем далее полагать, что $d_1 = d_2 = d$, и длительность цикла равна единице времени что значительно упрощает выкладки, не меняя сути дела. Производство работает циклами, и эти циклы у обеих фирм совпадают. Параметр d можно считать размером рынка, так как суммарный выпуск фирм должен быть меньше d, иначе прибыль будет неположительной.

Поведение каждой фирмы определяется ее стремлением максимизировать свою прибыль. Следовательно, прибыль i-й фирмы за цикл (выручка минус затраты на производство)

$$W_i(x_1, x_2) = x_i(c - bx) - a\,x_i = cx_i - bx \cdot x_i - a\,x_i = (c - a\,) \cdot x_i + bx \cdot x_i = bx_i[(c - a\,)/b - x],$$

где $d = (c - a\,)/b$.

Из этого соглашения вытекает, что фирмы стремятся максимизировать свою прибыль, получаемую за цикл или, что тоже самое, за единицу времени.

Проследим детально несколько циклов работы фирм, взяв для определенности какие-нибудь значения параметров, например,

$$b = 2,\ c = 140,\ a = 20.$$

Тем самым

$$d = (c - a\,)/b = 60.$$

$$p(x) = c - bx = 140 - 2x;$$

$$W_1(x_1, x) = bx_1(d - x) = 2x_1(60 - x);$$

$$W_2(x_2, x) = 2x_2(60 - x)$$

Получилась следующая таблица:

Номер цикла	x_1	x_2	x	$p(x)$	W_1	W_2
1	1	2	3	134	114	228
2	12	18	30	80	720	1080
3	15	25	40	60	600	1000
4	30	30	60	20	0	0
5	40	40	80	-20	-1600	-1600

Вначале, с ростом выпуска прибыли обеих фирм растут, но когда выпуски стали большие, на рынок стало поступать много товара, цена на него упала и формально стала даже отрицательной – см. 5-ый цикл. Содержательно, это означает, что такой большой объем товара выпускать нецелесообразно. Отсюда следует 1-ый подсказанный вывод: фирмы должны работать с оглядкой друг на друга – в своей работе они должны учитывать работу другой фирмы, т.е. фирмы должны сотрудничать.

Работающие в экономической теории привыкли к равновесным рынкам. Напомним, что состояние рынка называется равновесным, если спрос D равен предложению S. На рассматриваемом рынке в модели Курно предложение есть суммарный выпуск товара, обычно обозначаемый x. Спрос же есть обычно убывающая функция цены $D = D(p)$. Обратная зависимость цены от спроса – также убывающая функция $p = p(D)$. Ну, а в равновесном состоянии рынка $D = x$. Таким образом, равновесная цена есть функция x. Она и получается убывающей $p = p(x) = c - bx,\ b, c > 0$.

Допустим, что первая фирма узнала стратегию второй, т.е. объем ее выпуска x_2. Тогда она выбрала бы свой выпуск из условия максимизации своей прибыли:

$$\partial W_1 / \partial x_1 = b(d - (x_1 + x_2)) - bx_1 = 0,$$

т.е.

$$x_1^* = (d - x_2)/2. \tag{1}$$

Аналогично бы действовала вторая фирма, т.е. выбрала бы свой выпуск в объеме

$$x_2^* = (d - x_1)/2. \tag{2}$$

В дальнейшем считаем, что выпуск равномерно поступает на рынок.

2. Некоторые современные результаты. При выводе этих формул можно обойтись без производной – ведь функция

$$W_1(x_1, x) = bx_1(d - (x_2 + x_1))$$

при известном и фиксированном x_2 есть квадратичная функция от x_1:

$$W_1(x_1) = bx_1((d - x_2) - x_1).$$

То есть ее график – это парабола, веточки которой направлены вниз, а корни есть 0 и $(d - x_2)$. Значит максимум этой функции расположен посередине между корнями – в точке $x_1^* = (d - x_2)/2$. Таков же вывод и 2-ой формулы.

Стратегия Курно. Определим в связи с этими формулами оператор Курно

$$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d-x_2)/2 \\ (d-x_1)/2 \end{pmatrix}.$$

Этот оператор определен на двумерных векторах.

Один из важных вопросов – это вопрос о неподвижной точке этого оператора. В классической модели такая точка существует.

Предложение 1. В классической модели (для двух взаимодействующих фирм) оператор Курно имеет неподвижную точку $X^K = \begin{pmatrix} d/3 \\ d/3 \end{pmatrix}$.

Проверим, что – это неподвижная точка оператора Курно:

$$K(X^K) = \begin{pmatrix} \dfrac{d-d/3}{2} \\ \dfrac{d-d/3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/3 \\ d/3 \end{pmatrix} = X^K.$$

Предложение 2. Последовательность точек $\{X_{n+1} = K(X_n) : n = 0,1,2,...\}$ сходится к неподвижной точке X^K независимо от начальной точки X_0.

Доказательство. Пусть $|x_i - d/3| \le a$ для любого $i = 1,2$, тогда

$$|K(x_i) - d/3| = \left|\frac{d - x_{i+1}}{2} - d/3\right| = \left|\frac{d - 3x_{i+1}}{6}\right| = \left|\frac{d/3 - x_{i+1}}{2}\right| \le \frac{a}{2}.$$

т.е. каждая следующая итерация оператора Курно приближает точку к неподвижной точке $\begin{pmatrix} d/3 \\ d/3 \end{pmatrix}$.

Стратегия Штакельберга. Что будет, если одна из фирм сознательно раскроет свою стратегию? Пусть, например, первая фирма даст возможность второй узнать свой ход x_1, тогда вторая фирма ответит оптимальным для нее образом: $x_2^* = (d - x_1)/2$. Приучив 2-ю фирму действовать таким образом (что вполне возможно, если, скажем, 1-я фирма является более мощной) 1-я фирма будет теперь действовать, исходя именно из такого поведения 2-й фирмы. Но, конечно, прежде чем довести до сведения второй фирмы свой ход, Первая просчитает этот свой ход, и конкретизирует его, исходя из максимизации своей прибыли:

$$W_1(x_1) = bx_1(d - x_1 - (d - x_1)/2) = bx_1(d - x_1)/2.$$

Тогда

$$\partial W_1 / \partial x_1 = b(d - 2x_1)/2 = 0 \to x_1^{Ш} = d/2,$$

откуда и получаем так называемую *точку Штакельберга*:

$$x_1^{Ш} = d/2, \quad x_2^{Ш} = (d - x_1^{Ш}) = d/4.$$

Опять же можно и здесь не привлекать производную, а обойтись элементарными соображениями: при известной зависимости x_2 от x_1, именно:

$x_2 = (d - x_1)/2$ функция

$$W_1(x_1, x) = bx_1(d - x_1 - (d - x_1)/2) = bx_1(d/2 - x_1/2)$$

является квадратичной функцией одного переменного и ее максимум достигается в точке $x_1^Ш = d/2$, что и было доказано выше.

Прибыли фирм при этом

$$W_1^Ш = bd^2/8 > W_1^K,\ W_2^Ш = bd^2/16 < W_2^K,$$

суммарная прибыль

$$W^Ш = 3bd^2/16 < 2bd^2/9 = W^K,$$

т.е. прибыль первой фирмы больше, а прибыль второй и суммарная прибыль меньше, чем в точке Курно; цена товара равна $p^Ш = c - 3bd/4 < p^K$, и она меньше, чем в точке Курно.

Обобщенная стратегия Курно. Предположим, что двум фирмам доступен не весь рынок, а только какая-то a-я часть. Тогда формулы (1), (2) изменятся понятным образом:

$$x_1^* = (ad - x_2)/2, \quad (3)$$

$$x_2^* = (ad - x_1)/2. \quad (4)$$

Определим в связи с этим обобщенный оператор Курно:

$$aK\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ad - x_2)/2 \\ (ad - x_1)/2 \end{pmatrix}.$$

Важный вопрос – это вопрос о неподвижной точке этого оператора.

Предложение 1. В классической модели (для двух взаимодействующих фирм) обобщенный оператор Курно имеет неподвижную точку $X^{aK} = \begin{pmatrix} ad/3 \\ ad/3 \end{pmatrix}$.

Проверка, что – это неподвижная точка оператора Курно, проходит как и раньше:

$$aK(X^{aK}) = \begin{pmatrix} \dfrac{ad - ad/3}{2} \\ \dfrac{ad - ad/3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad/3 \\ ad/3 \end{pmatrix} = X^{aK}.$$

Примерно по такой же схеме можно определить и обобщенную стратегию и обобщенный оператор Штакельберга.

3. Получение большей прибыли за счет повышения цены. Поглядим формулу цены $p(x) = c - bx$ – с уменьшением количества поставляемого на рынок товара его цена увеличивается. Нельзя ли на этом «сыграть»? Т.е. искусственно уменьшить поставку товара, но за счет повышения цены из-за этого, увеличить прибыль.

Работа одной фирмы с перерывом. Пусть фирма одна работает на рынке. Рассмотрим следующий режим ее работы: первую половину цикла она выпускает $x/2$ единиц товара, а вторую половину цикла ничего не делает. Назовем такой режим работой с перерывом. За цикл она получает прибыль

$$P_1 = (bx/2)(d - x/2).$$

Сравним эту прибыль с прибылью при нормальном режиме

$$P = bx(d - x).$$

Решим неравенство

$$P_1 > P; \quad bx/2(d - x/2) > bx(d - x),$$

или

$$bx(2d - x) > 4bx(d - x); \quad x(2d - x) > 4x(d - x); \quad x(2d - x - 4(d - x)) > 0,$$

или

$$x(2d - x - 4d + 4x); \quad x(3x - 2d) > 0; \quad 3x(x - 2d/3) > 0$$

и мы видим, что при $x > 2d/3$ работа с перерывом дает большую прибыль! Впервые этот феномен был подмечен совсем недавно рядом исследователей (например, в работе [2]). Обобщим этот результат и придадим ему некоторые дополнительные краски.

Пусть фирма одна работает на рынке. Рассмотрим следующий режим ее работы: начальную $1/n$ часть цикла она выпускает x/n единиц товара, а остальную часть цикла ничего не делает. Назовем такой режим работой с большим перерывом. За цикл она получает прибыль

$$P_n = (bx/n)(d - x/n).$$

Сравним эту прибыль с прибылью при нормальном режиме

$$P = bx(d - x).$$

Решая неравенство

$$P_n > P; \quad (bx/n)(d - x/n) > bx(d - x)$$

так же как выше, получим, что в промежутке $\left[0, (n^2 - n)/(n^2 - 1)\right]$, где $n \geq 2$ неравенство выполняется!

Этот удивительный факт не был замечен исследователями за 150 лет известности модели Курно! Из доказанной конструкции сформулируем

Следствие. При любом n работа с большим перерывом может оказаться прибыльней работы с нормальным режимом.

Правда при очень большом n этот промежуток «съеживается» до совсем крохотного, приблизительно $\left[0, 1/n^2\right]$.

Подвергнем эти два режима работы несложному экономическому анализу:

При нормальном режиме – затраты на производство $D = a\,x$;
выручка $W = (c - bx)x$.

При работе с перерывом – затраты на производство $D_p = a\,\dfrac{x}{n}$;
выручка $W_p = \left(c - b\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{x}{n}$.

Вывод: в режиме работы с перерывом и затраты на производство меньше $\left(D_p < D\right)$; и выручка больше

$$\left(c-b\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n} > (c-bx)x; \quad \left(b-\frac{b}{n^2}\right)x^2+\left(\frac{c}{n}-c\right)x>0; \quad x\left[\left(b-\frac{b}{n^2}\right)x+\left(\frac{c}{n}-c\right)\right]>0,$$

что дает $(x<0)$ или $\left(x>\dfrac{c-\frac{c}{n}}{b-\frac{b}{n^2}}\right)$.

Оба неравенства выполняются при $x>\left(\dfrac{c-\frac{c}{n}}{b-\frac{b}{n^2}}\right)$.

На рынке работают две фирмы. Рассмотрим такой режим совместной работы: 1 фирма работает первую половину цикла, а вторую половину ничего не делает. 2-я фирма – наоборот: первую половину цикла ничего не делает, а вторую работает в нормальном режиме. Внешне все выглядит как будто одна фирма работает в нормальном режиме весь цикл. Сравним прибыль в таком режиме

$$P_1 = bx(d-x)$$

с прибылью, когда обе фирмы работают в нормальном режиме одновременно весь цикл

$$P_2 = 2bx(d-2x).$$

Решим неравенство

$$bx(d-x) > 2bx(d-2x); \quad xd - x^2 > 2xd - 4x^2$$

или

$$3x^2 - dx > 0; \quad 3x(x-d/3) > 0$$

и мы видим, что исследуемое неравенство выполняется, когда x лежит вне промежутка $[0, d/3]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А. Колемаев* Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

2. *Т.М. Гатауллин, В.И.Малыхин* Новый взгляд на конкуренцию // РАН, Институт проблем рынка. – Проблемы развития рыночной экономики, в. 2, с. 8–12.

3. *П.С.Геворкян, В.И.Малыхин* Распределение богатства в обществе и средний класс. – Электронный журнал, издаваемый АТ и СО, 2010; http://www.e-rej.ru.

4. *В.И. Малыхин* Математическое моделирование экономики. Учебно-практическое пособие для вузов. – М.: Издательство УРАО, 1998.

5. *В.М. Громенко* Моделирование микроэкономических процессов и систем: учеб. пособие. – М.: Изд-во МГОУ, 2001.