УДК 519.6
ББК 65.9(2)23

Волков В.В.,
аспирант,
Санкт-Петербургский Государственный Университет.

Использование методологии построения дерева событий для анализа финансово-экономических показателей

В данной статье рассматривается методология построения дерева событий для анализа финансово-экономических показателей. Методика основана на Байесовской модели рандомизации в условиях неопределённости. Построена схема оценки вероятностей по экспертной информации для иерархических структур. Приведен пример выбора альтернатив развития предприятия с помощью оценки вероятностей на основе нечисловой, неполной и неточной информации, полученной от экспертов.

Для анализа экономических процессов в последнее время часто используется теория принятия решений в условиях неопределённости. Применение данной методологии оправдано возможностью построения числового образа нечисловой информации [5]. Одним из методов экспертного оценивания в теории принятия решений является метод рандомизированных вероятностей [6]. В рамках данного подхода рассматривается ситуация, когда необходимо оценить вероятности p_i альтернатив A_i, $i = 1,...,r$. Альтернативами могут быть возможные изменения доходностей ценных бумаг, колебания цен и т.д. Здесь классификация объекта производится с точки зрения попадания данного объекта в определённую категорию (группу) с вероятностью p_i для альтернативы A_i, $i = 1,...,r$, и не учитываются условия, влияющие на изменение показателей развития экономической среды. На самом деле изменение экономических показателей связано с изменением различных характеристик (курс валют, процентная ставка по привлекаемым кредитам, стоимость топлива, уровень инфляции, и т. д.), каждая из которых может оказывать влияние на любой из показателей развития среды. Кроме того, экономические процессы развёрнуты во времени, поэтому возникает необходимость нахождения оценок $\bar{p}_i^{(t)}(I_j)$, $i = 1,...,r$, $j = 1,...,m$, вероятностей альтернатив $A_1^{(t)},...,A_r^{(t)}$ при наличии информации I_j, $\forall t = 1,...,t'$. Таким образом, процесс принятия решений в условиях неопределённости удобно представить в виде дерева событий. Рассмотрим иерархическую структуру принятия решений на основе дерева событий [7].

Рассмотрим ориентированный граф с начальной вершиной $A^{(0)}$ и последующими вершинами $A^{(1)}[1],...,A^{(1)}[i_1],...,A^{(1)}[r^{(1)}]$, связанными с $A^{(0)}$ дугами $r^{(1)}$ $(A^{(0)}, A^{(1)}[i_1])$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, где $A^{(0)}$ - начальная вершина, $A^{(1)}[i_1]$ - конечная вершина. Такую структуру будем называть простейшим деревом $T^{(0,1)} = \{A^{(0)} : A^{(1)}[i_1],\ i_1 = 1,...,r^{(1)}\}$. Данная структура может иметь следующую интерпретацию: $A^{(0)}$ можно рассматривать как начальное событие, а события $A^{(1)}[1],...,A^{(1)}[r^{(1)}]$ тогда являются последующими событиями, которые составляют полную группу попарно несовместных событий. С другой стороны, граф $T^{(0,1)} = \{A^{(0)} : A^{(1)}[i_1], i_1 = 1,...,r^{(1)}\}$ можно рассматривать как многоуровневую структуру, в которой вершина $A^{(0)}$ является начальным уровнем системы в момент t_0, а вершины $A^{(1)}[1],...,A^{(1)}[r^{(1)}]$ являются уровнями, которые могут быть достигнуты системой в момент $t_1 > t_0$. При анализе, например, деятельности конкретного предприятия можно рассматривать достижимый объём привлечения заёмных средств в момент t_0 в качестве начального состояния системы, тогда на основе дерева событий могут приниматься решения о финансировании предприятия в последующие моменты времени $t' > ... > t_2 > t_1 > t_0$.

Можно рассмотреть более сложную конструкцию, в которой конечные вершины $A^{(1)}[i_1]$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, являются начальными вершинами. В данном случае рассматриваемая структура будет соответствовать дереву $T^{(1,2)}(i_1) = \{A^{(1)}[i_1] : A^{(2)}[i_1,i_2],\ i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)\}$. В этом случае вершина $A^{(1)}[i_1]$ соединяется с вершиной $A^{(2)}[i_1,i_2]$ дугой $(A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1,i_2])$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,..., r^{(2)}(i_1)$. В результате мы получаем двухуровневое дерево $T^{(0,1,2)} = \{A^{(0)} : (A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1,i_2]),\ i_1 = 1,...,r^{(1)},\ i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)\}$ с начальной вершиной $A^{(0)}$ и последующими вершинами $A^{(2)}[1,1],..., A^{(2)}[i_1,i_2],...,\ A^{(2)}[r^{(1)}, r^{(2)}(r^{(1)})]$, которое состоит из цепей $(A^{(0)}, A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_2])$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$.

Продолжая процедуру надстройки дерева $T^{(0,1,2)}$, используем каждую вершину $A^{(2)}[i_1,i_2]$ $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$ в качестве начальной и построим дерево $T^{(1,2,3)}(i_1,i_2) = \{A^{(2)}[i_1,i_2] : A^{(3)}[i_1,i_2,i_3],\ i_3 = 1,...,r^{(3)}(i_1,i_2)\}$, которое включает $r^{(3)}(i_1,i_2)$ вершин и в котором вершины $A^{(2)}[i_1,i_2]$ соединены с вершинами $A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$ дугами $(A^{(2)}[i_1,i_2], A^{(3)}[i_1,i_2,i_3])$, где $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$, $i_3 = 1,...,r^{(3)}(i_1,i_2)$. Таким образом, мы получаем трёхуровневое дерево следующего вида:

$$T^{(0,1,2,3)} = \{A^{(0)} : (A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1,i_2], A^{(3)}[i_1,i_2,i_3],\\ i_1 = 1,..., r^{(1)},\ i_2 = 1,..., r^{(2)}(i_1),\ i_3 = 1,..., r^{(3)}(i_1,i_2)\}. \quad (1)$$

Это дерево имеет начальную вершину $A^{(0)}$ и $r^{(3)}(1,1) + ... + r^{(3)}(i_1,i_2) + ... + r^{(3)}(r^{(1)}, r^{(2)}(r_1))$ последующих вершин, каждая из которых соединяется с начальной вершиной цепью $(A^{(0)}, A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1,i_2], A^{(3)}[i_1,i_2,i_3])$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$, $i_3 = 1,...,r^{(3)}(i_1,i_2)$.

Если продолжить данную процедуру до присоединения к вершинам $A^{(k-1)}[i_1,...,i_{k-1}]$ деревьев $T^{(k-1,k)}(i_{k-1},i_k) = \{A^{(k-1)}[i_1,...,i_{k-1}] : A^{(k)}[i_1,...,i_k], i_k = 1,...,r^{(k)}(i_1,...,i_{k-1})\}$, то можно получить k - уровневое дерево с начальной вершиной $A^{(0)}$ следующего вида:

$$T^{(0,1,...,k)} = \{A^{(0)} : (A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1,i_2],..., A^{(k)}[i_1,..., i_k],\\ i_1 = 1,..., r^{(1)},\ i_2 = 1,..., r^{(2)}(i_1),..., i_k = 1,..., r^{(k)}(i_1,..., i_{k-1})\}. \quad (2)$$

В приведённой структуре каждая последующая вершина $A^{(k)}[i_1,...,i_k]$ k-уровневого дерева $T^{(0,1,...,k)}$ будет связана с цепочкой $(A^{(0)}, A^{(1)}[i_1],..., A^{(k)}[i_1,...,i_k])$, где $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1),\ldots,$ $i_k = 1,...,r^{(k)}(i_1,...,i_k)$.

Иногда возникает необходимость рассматривать комплексные события, которые состоят из нескольких альтернатив $A^{(k)}[i_1,...,i_k]$. Такие комплексные события обозначим как $B_1,...,B_n,...,B_N$, $B_n = \bigcup_{s=1}^{S_n} A^{(k)}[i_1^{(s)},...,i_k^{(s)}]$, $i_1^{(s)} = 1,...,r^{(1,s)},...,$ $i_k = 1,...,r^{(k,s)}(i_1^{(s)},...,i_k^{(s)})$.

Процесс принятия решений на основе дерева событий связан с приданием числового образа неточной, неполной и нечисловой информации, которая в свою очередь может быть квантифицирована с помощью переходных вероятностей.

Рассмотрим k- уровневое дерево $T^{(0,1,...,k)}$. Будем полагать, что с каждой парой $(A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}], A^{(j)}[i_1,...,i_j])$ связана переходная вероятность $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j) = P(A^{(j)}[i_1,...,i_j] // A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}])$, которую можно интерпретировать как вероятность перехода $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}] \to A^{(j)}[i_1,...,i_j]$ из состояния $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}]$ в состояние $A^{(j)}[i_1,...,i_j]$.

Рассмотрим теперь простейшее дерево $T^{(0,1)} = \{A^{(0)} : A^{(1)}[i_1], i_1 = 1,...,r^{(1)}\}$. Предположим, что для вершин $A^{(1)}[1],...,A^{(1)}[r^{(1)}]$ заданы ненулевые переходные вероятности $p^{(0,1)}(i_1) = P(A^{(1)}[i_1] // A^{(0)})$, $p^{(0,1)}(1) + ... + p^{(0,1)}(r^{(1)}) = 1$, которые означают вероятность наступления события $A^{(1)}[i_1]$ при условии, что событие $A^{(0)}$ уже наступило. Если рассматривать вершины простейшего дерева как уровни системы, то тогда уровень $A^{(0)}$ будет представлять собой состояние системы в нулевой момент времени t_0, а вероятности $p^{(0,1)}(i_1)$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$ могут интерпретироваться как возможность перехода системы из состояния $A^{(0)}$ в состояния $A^{(1)}[1],...,A^{(1)}[r^{(1)}]$, которые могут быть достигнуты в следующий момент времени $t_1 > t_0$.

На следующем этапе рассмотрения дерева $T^{(1,2)}(i_1) = \{A^{(1)}[i_1] : A^{(2)}[i_1,i_2], i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)\}$ появляются вероятности $p^{(i_1,2)}(i_2) = P(A^{(2)}[i_1,i_2] // A^{(1)}[i_1])$, $p^{(i_1,2)}(1) + ... + p^{(i_1,2)}(r^{(2)}(i_1)) = 1$, где $p^{(i_1,2)}(i_2)$ – вероятность наступления события $A^{(2)}[i_1,i_2]$, при условии наступления события $A^{(1)}[i_1]$, $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$.

Предполагается, что вероятность $p^{(i_1,2)}(i_2)$, связанная с переходом $A^{(1)}[i_1] \to A^{(2)}[i_1,i_2]$ из вершины $A^{(1)}[i_1]$ в вершину $A^{(2)}[i_1,i_2]$, является независимой от вероятности $p^{(0,1)}(i_1) = P(A^{(1)}[i_1] // A^{(0)})$ перехода $A^{(0)} \to A^{(1)}[i_1]$ из вершины $A^{(0)}$ в вершину $A^{(1)}(i_1)$. Таким образом, мы получаем вероятность $p^{(0,1,2)}(i_1,i_2)$ перехода $A^{(0)} \to A^{(1)}[i_1] \to A^{(2)}[i_1,i_2]$ из вершины $A^{(0)}$ в вершину $A^{(2)}[i_1,i_2]$ через вершину $A^{(1)}[i_1]$, где $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$. Формула для вычисления данной вероятности выглядит следующим образом:

$$p^{(0,1,2)}(i_1,i_2) = P(A^{(1)}[i_1] // A^{(0)}) \cdot P(A^{(2)}[i_1,i_2] // A^{(1)}[i_1]) = p^{(0,1)}(i_1) \cdot p^{(i_1,2)}(i_2). \qquad (3)$$

При рассмотрении дерева $T^{(2,3)}(i_1,i_2) = \{A^{(2)}[i_1,i_2] : A^{(3)}[i_1,i_2,i_3],\ i_3 = 1,...,r^{(3)}(i_1,i_2)\}$, мы полагаем не отрицательность условных вероятностей $p^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3) = P(A^{(3)}[i_1,i_2,i_3] // A^{(2)}[i_1,i_2])$, где $p^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3)$ – вероятность наступления события $A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$, при условии, что наступило событие $A^{(2)}[i_1,i_2]$, причём $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, $i_2 = 1,...,r^{(2)}(i_1)$, $i_3 = 1,...,r^{(3)}(i_1,i_2)$. Также предполагается независимость вероятности $p^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3)$ перехода $A^{(2)}[i_1,i_2] \to A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$ от события $A^{(2)}[i_1,i_2]$ к событию $A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$ и вероятности $p^{(1,2)}(i_1,i_1) = P(A^{(2)}[i_1,i_2] // A^{(1)}[i_1])$ перехода $A^{(2)}[i_1,i_2] \to A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$ от события $A^{(2)}[i_1,i_2]$ к событию $A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$. В результате мы получаем вероятность

$$\begin{aligned} p^{(0,1,2,3)}(i_1,i_2,i_3) &= P(A^{(1)}[i_1] // A^{(0)}) \cdot P(A^{(2)}[i_1,i_2] // A^{(1)}[i_1]) \cdot P(A^{(3)}[i_1,i_2,i_3] // A^{(2)}[i_1,i_2] = \\ &= p^{(0,1)}(i_1) \cdot p^{(1,2)}(i_1,i_2) \cdot p^{(2,3)}(i_1,i_2,i_3) \end{aligned} \qquad (4)$$

перехода $A^{(0)} \to A^{(1)}[i_1] \to A^{(2)}[i_1,i_2] \to A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$ из вершины $A^{(0)}$ в вершину $A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]$ соответственно через вершины $A^{(1)}[i_1]$ и $A^{(2)}[i_1,i_2]$ для трёхуровневого дерева $T^{(0,1,2,3)}$.

На k-ом шаге мы получаем дерево $T^{(0,1,\dots,k)}$, в котором простейшие деревья $T^{(k-1,k)}(i_{k-1},i_k) = \{A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}] : A^{(k)}[i_1,\dots,i_k], i_k = 1,\dots,r^{(k)}(i_1,\dots,i_{k-1})\}$ связаны с неотрицательными вероятностями $p^{(k-1,k)}(i_1,\dots,i_k) = P(A^{(k)}[i_1,\dots,i_k] // A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}])$, где $p^{(k-1,k)}(i_1,\dots,i_k)$ – вероятность наступления события $A^{(k)}[i_1,\dots,i_k]$ при условии $A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}]$, причём $i_{k-1} = 1,\dots,r^{(k-1)}(i_1,\dots,i_{k-1})$, $i_k = 1,\dots,r^{(k)}(i_1,\dots,i_k)$. Мы предполагаем, что вероятность $p^{(k-1,k)}(i_1,\dots,i_k)$ перехода $A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}] \to A^{(k)}[i_1,\dots,i_k]$ из состояния $A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}]$ в состояние $A^{(k)}[i_1,\dots,i_k]$ не зависит от вероятности $p^{(k-2,k-1)}(i_1,\dots,i_{k-1}) = P(A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}] // A^{(k-2)}[i_1,\dots,i_{k-2}])$ перехода $A^{(k-2)}[i_1,\dots,i_{k-2}] \to A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}]$ от события $A^{(k-2)}[i_1,\dots,i_{k-2}]$ к событию $A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}]$.

Вероятность $p^{(0,1,\dots,k)}(i_1,\dots,i_k)$ перехода $A^{(0)} \to A^{(1)}[i_1] \to A^{(2)}[i_1,i_2] \to A^{(3)}[i_1,i_2,i_3] \to \dots \to A^{(k)}[i_1,\dots,i_k]$ из состояния $A^{(0)}$ в состояние $A^{(k)}[i_1,\dots,i_k]$ для k-уровнего дерева $T^{(0,1,\dots,k)}$ рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & p^{(0,1,\dots,k)}(i_1,\dots,i_k) = \\ & = P(A^{(1)}[i_1] // A^{(0)}) \cdot P(A^{(2)}[i_1,i_2] // A^{(1)}[i_1]) \cdot \ldots \cdot P(A^{(k)}[i_1,\dots,i_k] // A^{(k-1)}[i_1,\dots,i_{k-1}] = \\ & = p^{(0,1)}(i_1) \cdot p^{(1,2)}(i_1,i_2) \cdot \ldots \cdot p^{(k-1,k)}(i_1,\dots,i_k). \end{aligned} \qquad (5)$$

При рассмотрении комплексных событий $B_1,\dots,B_N$, вероятности $P(B_1) = p_1^{(B)},\dots,B_N = p_N^{(B)}$ могут быть рассчитаны с помощью следующего соотношения:

$$p_n^{(B)} = P(B_n) = P\left(\bigcup_{s=1}^{S_n} A^{(k)}[i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)}]\right) = \sum_{s=1}^{S_n} p^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)}), \qquad (6)$$

$i_1^{(s)} = 1,\dots,r^{(1,s)}$, … , $i_k = 1,\dots,r^{(k,s)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)})$.

Учтём теперь тот факт, что вероятности $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j)$ перехода $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}] \to A^{(j)}[i_1,...,i_j]$ из состояния $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}]$ в состояние $A^{(j)}[i_1,...,i_j]$, где $i_1 = 1,...,r^{(1)}$, …, $i_j = 1,...,r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})$, $j = 1,...k$ для k-уровнего дерева $T^{(0,1,...,k)}$ строятся на основе экспертной информации.

Рассмотрим простейшее дерево $T^{(j-1,j)}(i_1,...,i_{j-1})$ с начальным элементом $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}]$ и с последующими элементами $A^{(j)}[i_1,...,i_{j-1},1],\ldots$, $A^{(j)}[i_1,...,i_{j-1},r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})]$. $r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})$ в количестве $r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})$. Для простоты будем полагать, что $r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1}) = r$. Тогда альтернативы $A^{(j)}[i_1,...,i_{j-1},1],\ldots$, $A^{(j)}[i_1,...,i_{j-1},r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})]$ будем рассматривать как $A_1,...,A_r$, а вероятности $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_{j-1},1)$, …, $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_{j-1},r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1}))$ будем приравнивать к $p_1,...,p_r$.

Каждый источник информации может давать по поводу вероятностей $p_1,...,p_r$ либо порядковую информацию, которая может быть представлена с помощью равенств или/и неравенств из множества $OI = \{ p_i > p_l, p_u = p_v;\ i,l,u,v = 1,...,r\}$, либо интервальную информацию (II), которая может быть описана множеством отрезков $[a_i,b_i]$, $0 \le a_i \le b_i \le 1$, где $i = 1,...,r$. Если учесть, что информация, получаемая из источника, является неполной, то можно сказать, что $I = OI \cup II$, где I – нечисловая, неточная и неполная информация (ннн-информация). В данном случае $I = \{ p_i > p_l, p_u = p_v;\ a_t \le p_t \le b_t;\ i,l,u,v,t = 1,...,r\}$ для вероятностей $p_1,...,p_r$ альтернатив $A_1,...,A_r$.

Обозначим в качестве множества допустимых векторов $p = (p_1,..., p_r)$ – множество $P(r;I)$ при наличии ннн-информации I, где $P(r) = \{p = (p_1,..., p_r) \in R^r : p_i \ge 0,\ p_1 + ... + p_r = 1\}$ является симплексом размерности $r-1$. Моделируя случайный выбор вектора $p = (p_1,..., p_r)$ из множества $P(r;I)$, мы можем рассматривать случайный вектор $\tilde{p}(I) = (\tilde{p}_1(I),..., p_r(I))$, $\tilde{p}_1(I) + ... + \tilde{p}_r(I) = 1$. Будем рассматривать вероятности $\tilde{p}_i(I)$ как случайные оценки вероятностей p_i, при наличии информации I.

Математическое ожидание, стандартное отклонение и ковариация величины $\tilde{p}_i(I)$ могут быть вычислены на основе следующих соотношений:

$$\bar{p}_i(I) = E\tilde{p}_i(I) \tag{7}$$

$$sp_i(I) = \sqrt{D\tilde{p}_i(I)} \tag{8}$$

$$\operatorname{cov}(\tilde{p}_i(I), \tilde{p}_j(I)) = c_{ij}(I). \tag{9}$$

Если рассмотреть k- уровневое дерево $T^{(0,1,...,k)}$ и предположить, что ннн-информация I является доступной и представимой в виде равенств и неравенств относительно переходных вероятностей $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j)$, $i_1 = 1,...,r^{(1)},\ldots$, $i_j = 1,...,r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})$, $j = 1,...k$, тогда можно рассматривать вероятность $\tilde{p}^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j;I)$ как случайную оценку вероятности $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j)$. Математическое ожидание

$\overline{p}^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j;I)$ можно рассматривать как оценку вероятности наступления события $A^{(j)}[i_1,...,i_j]$, а стандартное отклонение $sp^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j;I)$ – как меру точности данной оценки.

Ковариацию случайной величины $\tilde{p}^{(j-1,j^{(1)})}(i_1,...,i_{j^{(1)}};I)$ и величины $\tilde{p}^{(j-1,j^{(2)})}(i_1,...,i_{j^{(2)}};I)$ обозначим как $c^{(j-1)}(i_1,...,i_{j-1};j^{(1)},j^{(2)};I)$.

Теперь будим искать характеристики величины $\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k;I)$ для общего случая k- уровневого дерева $T^{(0,1,...,k)}$. Рассмотрим случайную оценку $\tilde{p}^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j;I)$ вероятности $p^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j)$ перехода $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}]\to A^{(j)}[i_1,...,i_j]$ из состояния $A^{(j-1)}[i_1,...,i_{j-1}]$ в состояние $A^{(j)}[i_1,...,i_j]$, где $i_1=1,...,r^{(1)}$, $\ldots$, $i_j=1,...,r^{(j)}(i_1,...,i_{j-1})$, $j=1,..k$, при условии, что доступна информация I. Можно рассмотреть вероятность $p^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k)$ перехода $A^{(0)}\to A^{(1)}[i_1]\to A^{(2)}[i_1,i_2]\to A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]\to...\to A^{(k)}[i_1,...,i_k]$ из состояния $A^{(0)}$ в состояния $A^{(k)}[i_1,...,i_k]$ в дереве $T^{(0,1,...,k)}$. Данная вероятность может быть вычислена как произведение переходных вероятностей $p^{(0,1)}(i_1),p^{(1,2)}(i_1,i_2),...,p^{(k-1,k)}(i_1,...,i_k)$.

Таким образом, вероятность $\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k;I)=\tilde{p}^{(0,1)}(i_1;I)\cdot\tilde{p}^{(1,2)}(i_1,i_2;I)\cdot...\cdot\tilde{p}^{(k-1,k)}(i_1,...,i_k;I)$ можно рассматривать как случайную оценку вероятности $p^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k)$.

Соотношение для математического ожидания величины $\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k;I)$ выглядит как

$$E\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k;I)=\overline{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k;I)=\overline{p}(i;I)=\prod_{j=1}^{k}\overline{p}^{\,j-1,j}(i_1,...,i_j;I). \qquad (10)$$

Соотношение для дисперсии:

$$\begin{aligned}&D\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_k;I)=\\&=\prod_{j=1}^{k}\left(\overline{p}^{\,j-1,j}(i_1,...,i_j;I)^2+sp^{\,j-1,j}(i_1,...,i_j;I)^2\right)-\prod_{j=1}^{k}\overline{p}^{\,j-1,j}(i_1,...,i_j;I)^2\end{aligned} \qquad (11)$$

Соотношение для ковариации случайных величин $\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_j,i_{j+1}^{(1)},...,i_k^{(1)};I)$ и $\tilde{p}^{(0,1,...,k)}(i_1,...,i_j,i_{j+1}^{(2)},...,i_k^{(2)};I)$ перехода $A^{(0)}\to A^{(1)}[i_1]\to A^{(2)}[i_1,i_2]\to A^{(3)}[i_1,i_2,i_3]\to...\to A^{(k)}[i_1,...,i_k]$, где $\overline{p}^{\,j-1,j}(i_1,...,i_j;I)$ – математическое ожидание, а $sp^{\,j-1,j}(i_1,...,i_j;I)$ – стандартное отклонение величины $\tilde{p}^{(j-1,j)}(i_1,...,i_j;I)$, представлено в (12). Также в данном соотношении $c^{(j-1)}(i_1,...,i_{j-1};j^{(1)},j^{(2)};I)$ является ковариацией случайных величин $p^{(j-1,j^{(1)})}(i_1,...,i_{j^{(1)}})$, $p^{(j-1,j^{(2)})}(i_1,...,i_{j^{(2)}})$. Вектор индексов $i=(i_1,...,i_k)$ описывает цепочку переходов из вершины $A^{(0)}$ в вершину $A^{(k)}[i_1,...,i_k]$.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\dots,i_k^{(1)};I),\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(2)},\dots,i_k^{(2)};I))=\\
&=\prod_{r=1}^{j}\left(\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_r;I)^2+sp^{r-1,r}(i_1,\dots,i_r;I)^2\right)\cdot\\
&\cdot\left(c^{(j-1)}(i_1,\dots,i_{j-1};j^{(1)},j^{(2)};I)+\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)};I)\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)};I)\right)\cdot\\
&\cdot\prod_{r=j+2}^{k}\left(\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\dots,i_r^{(1)};I)\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\dots,i_r^{(1)};I)\right)-\\
&-\prod_{r=1}^{j}\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_r;I)^2\prod_{r=j+1}^{k}\left(\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\dots,i_r^{(1)};I)\bar{p}^{r-1,r}(i_1,\dots,i_j,i_{j+1}^{(1)},\dots,i_r^{(1)};I)\right)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Если необходимо рассматривать комплексные события $B_1,\dots,B_n,\dots,B_N$, то можно рассчитать оценки $\tilde{p}_1^{(B)}(I),\dots,\tilde{p}_N^{(B)}(I)$ вероятностей $p_1^{(B)},\dots,p_N^{(B)}$. В этом случае, математическое ожидание, являющееся оценкой вероятности наступления события B_n при доступности информации I, рассчитывается как

$$
E\tilde{p}_n^{(B)}(I)=E\left[\sum_{s=1}^{S_n}\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)};I)\right]=\sum_{s=1}^{S_n}E\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)};I)=\sum_{s=1}^{S_n}\bar{p}(i^{(s)};I). \tag{13}
$$

Дисперсия величины $\tilde{p}_n^{(B)}(I)$ имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&D\tilde{p}_n^{(B)}(I)=\sum_{s,t=1}^{S_n}\operatorname{cov}(\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)};I),\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(t)},\dots,i_k^{(t)};I))=\\
&=\sum_{s=1}^{S_n}D\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)};I)-2\sum_{\substack{s,t=1,\\ s<t}}^{S_n}\operatorname{cov}(\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(s)},\dots,i_k^{(s)};I),\tilde{p}^{(0,1,\dots,k)}(i_1^{(t)},\dots,i_k^{(t)};I)).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Мы получили соотношения для математического ожидания и дисперсии величины $\tilde{p}_n^{(B)}(I)$. На основе данных соотношений далее будут оцениваться вероятности и стандартные отклонения альтернативных состояний финансово-экономической среды.

Теперь рассмотрим упрощённый пример выбора альтернативы развития предприятия на основе построения дерева событий. Будем предполагать, что для некоторого предприятия возникает вопрос о продаже бизнеса через определённый период времени. В качестве объекта продажи выберем профильное производство. Вектор исходных характеристик для рассматриваемого проекта $x=(x_1,x_2,x_3)$ будет состоять из компоненты, соответствующей стоимости активов (x_1), компоненты, соответствующей курсу акций компании (x_2), и компоненты, обозначающей себестоимость продукции (x_3). Таким образом, мы будем проводить оценку проекта по трём исходным характеристикам.

Предположим, что на каждую из рассмотренных характеристик x_i, $i=1,\dots,r$, влияют цены на нефть. Будем считать, что альтернативным событиям $A^{(1)}[i_1]$, $i_1=1,\dots,3$, будут соответствовать: значительное (более чем на 15%) увеличение цены на нефть $A^{(1)}[1]$, незначительное изменение (не более чем на 5%) цены не нефть $A^{(1)}[2]$, значительное (более чем на 15%) понижение цены не нефть $A^{(1)}[3]$. В данном случае мы имеем дело с простейшим деревом $T^{(0,1)} = \{A^{(0)} : A^{(1)}[i_1],\ i_1 = 1,\ldots,3\}$. Рассмотрим дерево $T^{(1,2)}(i_1) = \{A^{(1)}[i_1] : A^{(2)}[i_1, i_2],\ i_2 = 1,\ldots,2\}$, в котором событиям второго уровня $A^{(2)}[i_1, i_2]$ соответствуют варианты изменения показателя x_1 либо в сторону повышения, либо в сторону понижения. Таким образом, мы рассматриваем для показателя x_1 дерево $T^{(0,1,2)} = \{A^{(0)} : (A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1, i_2]),\ i_1 = 1,\ldots,3,\ i_2 = 1,\ldots,2\}$. Данная структура изображена на Рисунке 1.

Допустим, что при рассмотрении альтернатив $A^{(1)}[i_1]$, $i_1 = 1,\ldots,3$, доступна информация:

$$I_j = \left\{p^{(0,1)}(1) > p^{(0,1)}(2);\ p^{(0,1)}(2) = p^{(0,1)}(3)\right\}.$$

Тогда, используя метод рандомизированной квантификации, для вероятностей

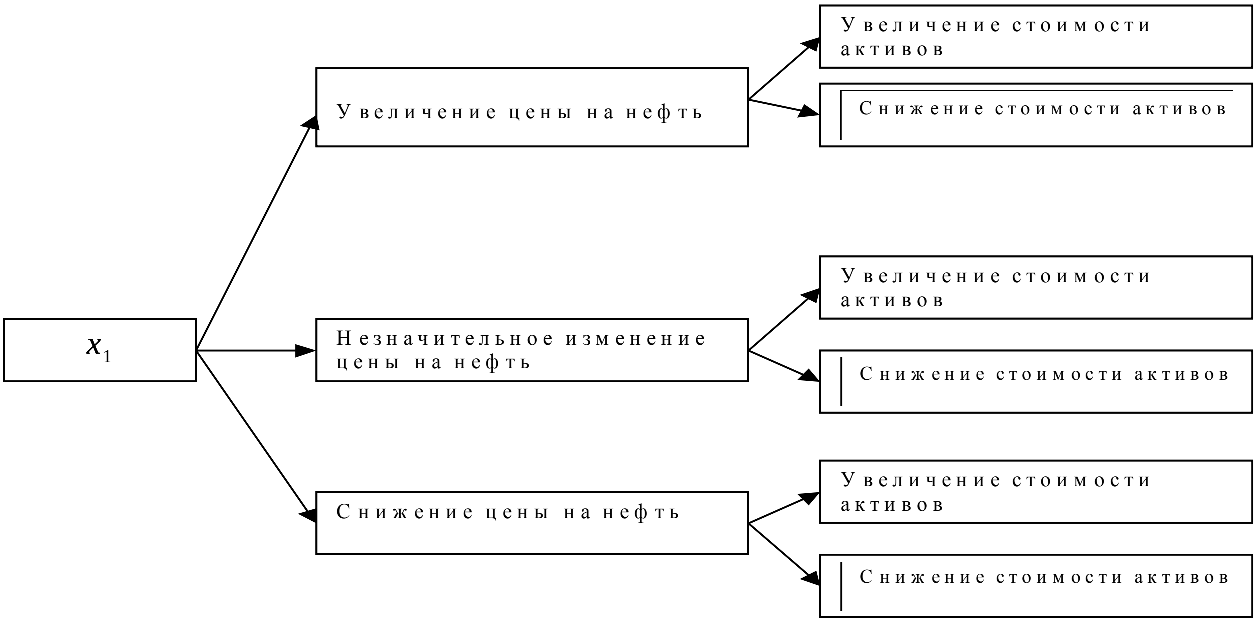


Рис. 1. Дерево событий для случая изменения стоимости активов

$p^{(0,1)}(i_1)$ могут быть получены следующие оценки альтернатив $A^{(1)}[i_1]$:

№	Характеристика	Мин.	Макс.	Среднее	Стандарт
1	p(1)	0.400	1.000	0.700	0.224
2	p(2)	0.000	0.300	0.150	0.112
3	p(3)	0.000	0.300	0.150	0.112

Визуализация полученных оценок представлена на Рисунке 2. Длины представленных отрезков соответствуют удвоенным стандартным отклонениям $sp_i(I_j)$.

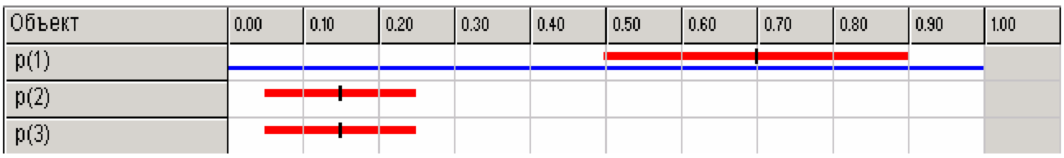


Рис. 2. Визуализация оценок для простейшего дерева $T^{(0,1)}$ в случае изменения стоимости активов.

Теперь получим оценки вероятностей $p^{(1,2)}(i_1, i_2)$ альтернатив $A^{(2)}[i_1, i_2]$ для дерева $T^{(1,2)}(i_1) = \{A^{(1)}[i_1] : A^{(2)}[i_1, i_2],\ i_2 = 1,\dots,2\}$. Будем полагать, что эксперту доступна информация

$$I_j = \left\{ p^{(1,2)}(1) > p^{(1,2)}(2) \right\}.$$

Следует заметить, что в данном примере мы для простоты предполагаем, что для оценки вероятностей $p^{(1,2)}(i_1, i_2)$ альтернатив $A^{(2)}[i_1, i_2]$ используется одна и та же информация. Однако для оценки каждой альтернативы может быть использована различная информация I_j. Оценка вероятностей $p^{(1,2)}(i_1, i_2)$ альтернатив $A^{(2)}[i_1, i_2]$ будут выглядеть как на Рисунке 3.

№	Характеристика	Мин.	Макс.	Среднее	Стандарт
1	p(1,1)	0.600	0.700	0.650	0.050
2	p(1,2)	0.300	0.400	0.350	0.050

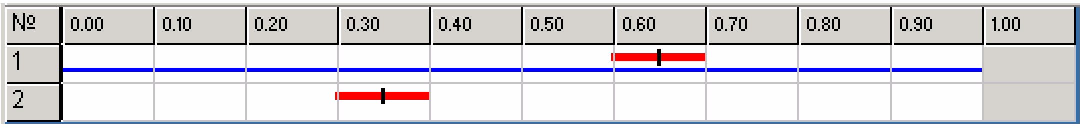


Рис. 3. Оценки вероятностей для дерева $T^{(1,2)}(i_1)$ в случае изменения стоимости активов

Используя соотношения (10) и (11) можно получить соответствующие оценки математического ожидания и стандартного отклонения (См. Табл. 1). Для полученных результатов выполняется свойство $p_1 + \ldots + p_r = 1$.

Таблица 1. Оценки вероятностей $p^{(0,1,2)}(i_1, i_2)$ для альтернатив изменения показателя стоимости активов.

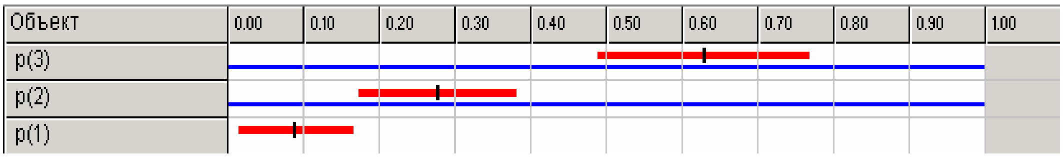
Оценка	Значение
$\bar{p}^{(0,1,2)}(1,1; I) \pm sp^{(0,1,2)}(1,1; I)$	$0{,}455 \pm 0{,}150$
$\bar{p}^{(0,1,2)}(1,2; I) \pm sp^{(0,1,2)}(1,2; I)$	$0{,}245 \pm 0{,}087$
$\bar{p}^{(0,1,2)}(2,1; I) \pm sp^{(0,1,2)}(2,1; I)$	$0{,}097 \pm 0{,}073$
$\bar{p}^{(0,1,2)}(2,2; I) \pm sp^{(0,1,2)}(2,2; I)$	$0{,}052 \pm 0{,}040$
$\bar{p}^{(0,1,2)}(3,1; I) \pm sp^{(0,1,2)}(3,1; I)$	$0{,}097 \pm 0{,}073$
$\bar{p}^{(0,1,2)}(3,2; I) \pm sp^{(0,1,2)}(3,2; I)$	$0{,}052 \pm 0{,}040$

Можно рассмотреть комплексное событие $B_1 = \{\textit{увеличение стоимости активов}\}$ и дополнительное к нему событие $B_2 = \{\textit{снижение стоимости активов}\}$. С помощью соотношений (13) и (14) можно оценить вероятность того, что увеличится или уменьшится стоимость активов с учётом изменения цены на нефть. В нашем примере оценка вероятности увеличения стоимости активов $\bar{p}^{(0,1,2)}(B_1) = 0{,}650$, а $sp^{(0,1,2)}(B_1) = 0{,}297$. Оценка вероятности снижения стоимости активов $\bar{p}^{(0,1,2)}(B_2) = 0{,}350$, а $sp^{(0,1,2)}(B_2) = 0{,}167$.

Рассмотрим вторую компоненту вектора исходных характеристик x_2, соответствующую курсу акций компании. Аналогично построим дерево событий $T^{(0,1,2)} = \{A^{(0)} : (A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1, i_2]),\ i_1 = 1,\dots,3,\ i_2 = 1,\dots,2\}$. Данная структура изображена на

Рисунке 5. При рассмотрении альтернатив $A^{(1)}[i_1]$, $i_1 = 1,\ldots,3$, доступна информация $I_j = \{p^{(0,1)}(1) < p^{(0,1)}(2); p^{(0,1)}(2) < p^{(0,1)}(3)\}$. Тогда для вероятностей $p^{(0,1)}(i_1)$ могут быть получены следующие оценки альтернатив $A^{(1)}[i_1]$:

№	Характеристика	Мин.	Макс.	Среднее	Стандарт
1	p(1)	0.000	0.200	0.063	0.070
2	p(2)	0.100	0.400	0.275	0.097
3	p(3)	0.500	0.900	0.663	0.132



Оценки вероятностей $p^{(1,2)}(i_1, i_2)$ альтернатив $A^{(2)}[i_1, i_2]$ для дерева $T^{(1,2)}(i_1) = \{A^{(1)}[i_1]: A^{(2)}[i_1, i_2],\ i_2 = 1,\ldots,2\}$ в случае изменения курса акций при использовании информации $I_j = \{p^{(1,2)}(1) > 0{,}5; p^{(1,2)}(2) < 0{,}3\}$ представлены на Рисунке 4.

№	Характеристика	Мин.	Макс.	Среднее	Стандарт
1	p(1,1)	0.700	1.000	0.850	0.112
2	p(1,2)	0.000	0.300	0.150	0.112

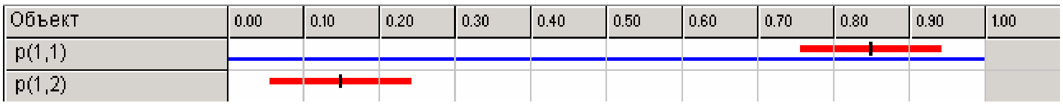


Рис. 4. Оценки вероятностей для дерева $T^{(1,2)}(i_1)$ в случае изменения котировок акций

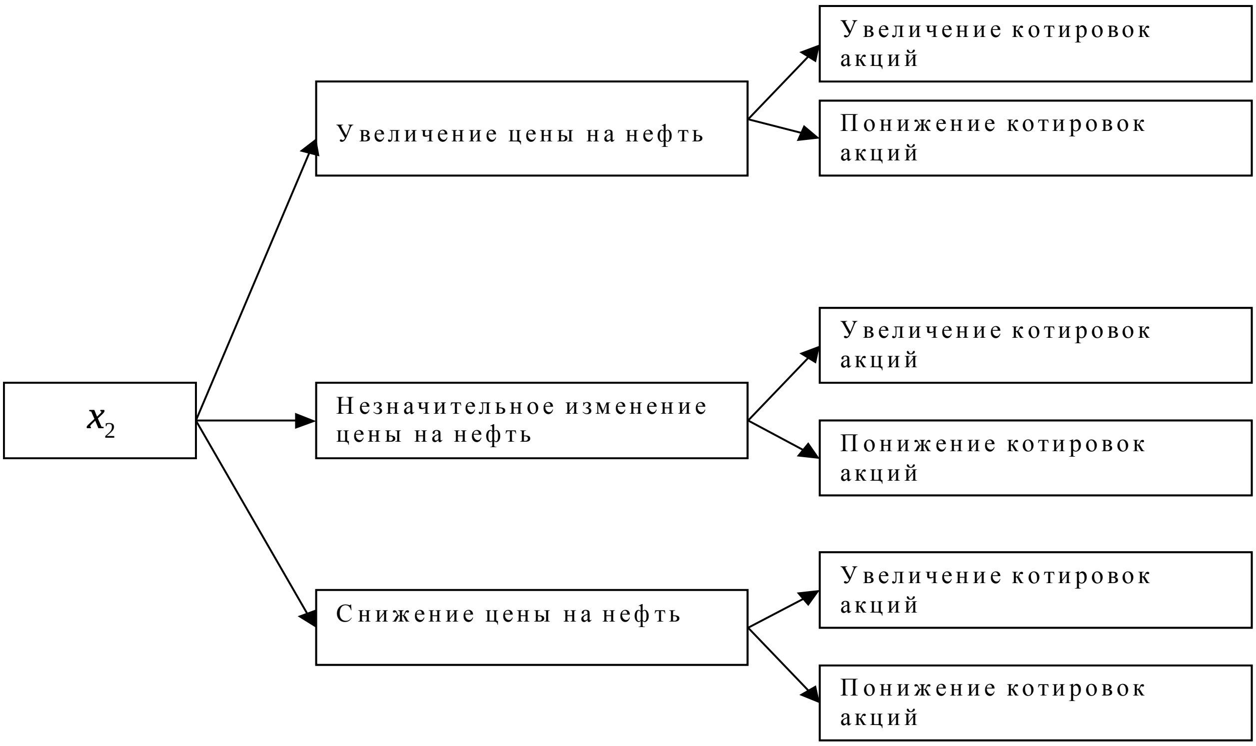


Рис. 5. Дерево событий для случая изменения курса акций

Математическое ожидание $\overline{p}^{(0,1,2)}(i_1,i_2;I)$ и стандартное отклонение $sp^{(0,1,2)}(i_1,i_2;I)$ представлены в Таблице 2.

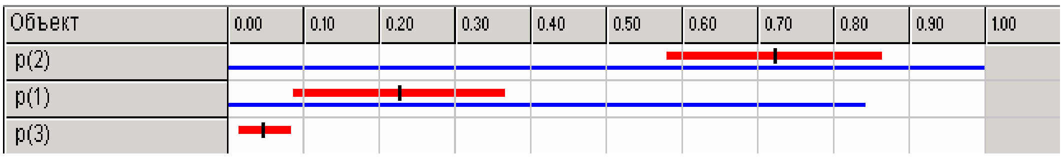
Таблица 2. Оценки вероятностей $p^{(0,1,2)}(i_1,i_2)$ для альтернатив изменения показателя котировок акций

Оценка	Значение
$\overline{p}^{(0,1,2)}(1,1;I) \pm sp^{(0,1,2)}(1,1;I)$	$0{,}050 \pm 0{,}060$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(1,2;I) \pm sp^{(0,1,2)}(1,2;I)$	$0{,}010 \pm 0{,}015$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(2,1;I) \pm sp^{(0,1,2)}(2,1;I)$	$0{,}230 \pm 0{,}089$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(2,2;I) \pm sp^{(0,1,2)}(2,2;I)$	$0{,}040 \pm 0{,}036$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(3,1;I) \pm sp^{(0,1,2)}(3,1;I)$	$0{,}560 \pm 0{,}135$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(3,2;I) \pm sp^{(0,1,2)}(3,2;I)$	$0{,}100 \pm 0{,}078$

При рассмотрении комплексного события $B_1 = \{\textit{увеличение котировок акций}\}$ и дополнительного к нему события $B_2 = \{\textit{снижение котировок акций}\}$ оценки вероятностей наступления данных событий и стандартных отклонений соответственно равны $\overline{p}^{(0,1,2)}(B_1) = 0{,}850$, а $sp^{(0,1,2)}(B_1) = 0{,}284$ и $\overline{p}^{(0,1,2)}(B_2) = 0{,}150$, $sp^{(0,1,2)}(B_2) = 0{,}129$.

Третья компонента вектора исходных характеристик x_3 соответствует себестоимости производимой продукции. Построим дерево событий $T^{(0,1,2)} = \{A^{(0)} : (A^{(1)}[i_1], A^{(2)}[i_1,i_2]),\ i_1 = 1,\ldots,3,\ i_2 = 1,\ldots,2\}$. Данная структура изображена на Рисунке 7. При рассмотрении альтернатив $A^{(1)}[i_1]$, $i_1 = 1,\ldots,3$, доступна информация $I_j = \{p^{(0,1)}(1) < p^{(0,1)}(2);\ p^{(0,1)}(3) < 0{,}1\}$. Тогда для вероятностей $p^{(0,1)}(i_1)$ могут быть получены следующие оценки альтернатив $A^{(1)}[i_1]$:

№	Характеристика	Мин.	Макс.	Среднее	Стандарт
1	p(1)	0.000	0.400	0.200	0.141
2	p(2)	0.500	1.000	0.750	0.150
3	p(3)	0.000	0.100	0.050	0.050



Оценки вероятностей $p^{(1,2)}(i_1,i_2)$ альтернатив $A^{(2)}[i_1,i_2]$ для дерева $T^{(1,2)}(i_1) = \{A^{(1)}[i_1] : A^{(2)}[i_1,i_2],\ i_2 = 1,\ldots,2\}$ в случае изменения себестоимости продукции при использовании информации $I_j = \{0{,}2 < p^{(1,2)}(1) < p^{(1,2)}(2)\}$ представлены на Рисунке 6.

№	Характеристика	Мин.	Макс.	Среднее	Стандарт
1	p(1,1)	0.200	0.450	0.325	0.085
2	p(1,2)	0.550	0.800	0.675	0.085

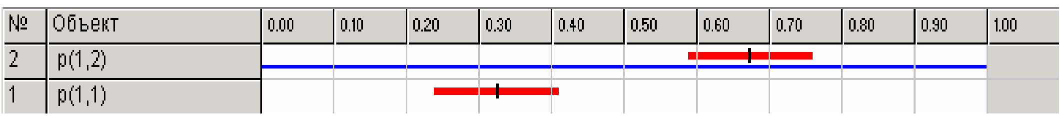


Рис. 6. Оценки для дерева $T^{(1,2)}(i_1)$ в случае изменения себестоимости продукции

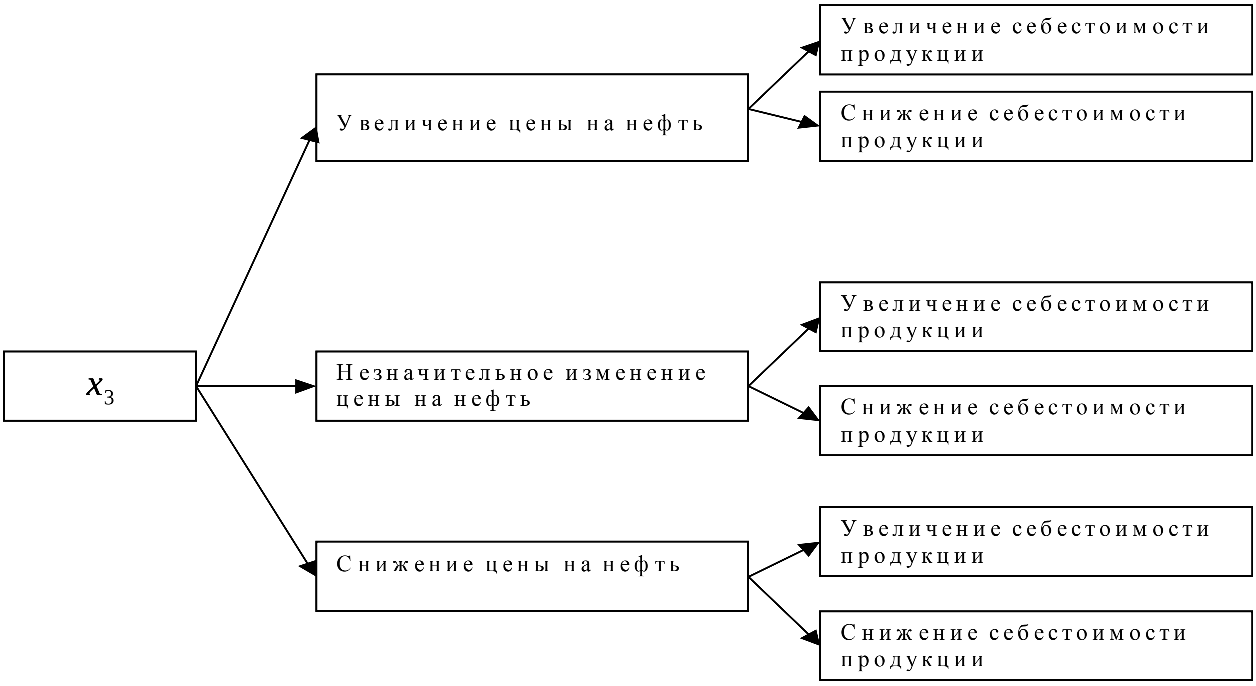


Рис. 7. Дерево событий для случая изменения себестоимости продукции

Математическое ожидание $\overline{p}^{(0,1,2)}(i_1, i_2; I)$ и стандартное отклонение $sp^{(0,1,2)}(i_1, i_2; I)$ представлены в Таблице 3.

Таблица 3. Оценки вероятностей $p^{(0,1,2)}(i_1, i_2)$ для альтернатив изменения показателя себестоимости продукции.

Оценка	Значение
$\overline{p}^{(0,1,2)}(1{,}1; I) \pm sp^{(0,1,2)}(1{,}1; I)$	$0{,}060 \pm 0{,}047$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(1{,}2; I) \pm sp^{(0,1,2)}(1{,}2; I)$	$0{,}140 \pm 0{,}101$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(2{,}1; I) \pm sp^{(0,1,2)}(2{,}1; I)$	$0{,}230 \pm 0{,}077$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(2{,}2; I) \pm sp^{(0,1,2)}(2{,}2; I)$	$0{,}530 \pm 0{,}122$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(3{,}1; I) \pm sp^{(0,1,2)}(3{,}1; I)$	$0{,}020 \pm 0{,}016$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(3{,}2; I) \pm sp^{(0,1,2)}(3{,}2; I)$	$0{,}040 \pm 0{,}035$

При рассмотрении комплексного события $B_1 = \{\text{\textit{увеличение себестоимости продукции}}\}$ и дополнительного к нему события $B_2 = \{\text{\textit{снижение себестоимости продукции}}\}$ оценки вероятностей наступления данных событий и стандартные отклонения соответственно равны $\overline{p}^{(0,1,2)}(B_1) = 0{,}300$, а $sp^{(0,1,2)}(B_1) = 0{,}140$ и $\overline{p}^{(0,1,2)}(B_2) = 0{,}700$, $sp^{(0,1,2)}(B_2) = 0{,}259$.

В результате, мы получили следующие оценки, которые могут быть использованы для построения сводных показателей проектов развития фирмы:

Таблица 4. Вероятности изменения стоимости активов, курса акций и себестоимости

Оценка	Значение
$\overline{p}^{(0,1,2)}(asset^{(+)}) \pm sp^{(0,1,2)}(asset^{(+)})$	$0{,}650 \pm 0{,}297$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(asset^{(-)}) \pm sp^{(0,1,2)}(asset^{(-)})$	$0{,}350 \pm 0{,}167$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(price^{(+)}) \pm sp^{(0,1,2)}(price^{(+)})$	$0{,}850 \pm 0{,}284$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(price^{(-)}) \pm sp^{(0,1,2)}(price^{(-)})$	$0{,}150 \pm 0{,}129$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(\cos t^{(+)}) \pm sp^{(0,1,2)}(\cos t^{(+)})$	$0{,}300 \pm 0{,}140$
$\overline{p}^{(0,1,2)}(\cos t^{(-)}) \pm sp^{(0,1,2)}(\cos t^{(-)})$	$0{,}700 \pm 0{,}259$

В заключении можно сказать, что приведённый метод оценки и придания числового образа экспертной информации является достаточно гибким и может использоваться для анализа не только экономических иерархических систем.

Список литературы

1. Горшков А.С., Мясников А.В., Хованов Н.В. Прогнозирование эволюции сложных систем в условиях неопределённости // Материалы 6-й международной конференции «Анализ, прогнозирование и управление в сложных системах». Т. 2. СЗТУ, СПб., СПбГУ, 2005. – 8 с.
2. Колесников Г.И., Корникова Н.В., Федотов Ю.В., Хованов Н.В. Оценка вероятностей альтернатив развития фондового рынка в условиях дефицита числовой информации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Вып.2. СПб., СПбГУ, 2005. – 18 с.
3. Колесов Д.Н., Михайлов М.В., Хованов Н.В. Оценка сложных финансово-экономических объектов с использованием системы поддержки принятия решений АСПИД-3W. СПб., СПбГУ, 2004. – 63 с.
4. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., СПбГУ, 1996. – 196 с.
5. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. СПб., СПбГУ, 1998. – 201 с.
6. Hovanov N.V., Yudaeva M.S., Kotov N.V. Alternatives probabilities estimation by means of non-numeric, non-exact and non-complete information obtained from sources of different reliability // Proceedings of the International Scientific School “Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems”. St. Petersburg (Russia), RAS, 2005. p. 271-277.
7. Hovanov N.V., Yudaeva M.S., Kotov N.V. Event-Tree with randomized transition probabilities as a new tool for alternatives probabilities estimation under uncertainty // Proceedings of the Sixth International Scientific School “Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems”. St. Petersburg, July 4-8, 2006. SPb., RAS, 2006. p. 118-125.