Геворкян П.С., Малыхин В.И.,
Академии труда и социальных отношений (АТиСО)

КЛАССИЧЕСКАЯ МАРКСОВА ПОЛИТЭКОНОМИЯ И СОВРЕМЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

Наверное, времена наибольшего влияния марксовой политэкономии прошли, но она и сейчас остается весьма влиятельной. Тем не менее ее основные понятия растолковываются так же, как по сути и самим Марксом, т.е. на уровне известной формулы T - $Д$ - T. Между тем многие понятия марксовой политэкономии находят вполне адекватное математическое воплощение. Вспоминая известное выражение, что в любой науке столько «научности», сколько в ней математики, нужно согласиться с тем, что математизация науки (в данном случае, марксовой политэкономии) всегда ей полезна.

Для понимания дальнейшего достаточно обычного ВУЗовского курса высшей математики.

I. Прибавочная стоимость по Марксу. Вряд ли кто станет оспаривать, что одним из центральных понятий марксовой политэкономии является понятие «прибавочной стоимости». В этом разделе находится математическое выражение прибавочной стоимости по Марксу и «справедливое» разделение прибыли между «рабочими» и «капиталистом» в теории фирмы.

I.1. Теория фирмы. Деятельность фирмы полностью описывается производственной функцией f, которая устанавливает связь между использованными ресурсами (затратами) X и выпуском продукции y (см.,например, [1]). Производственная функция является возрастающей вогнутой функцией вектора затрат. В дифференциальной форме это выражается в положительности первых частных производных функции f и отрицательной определенности матрицы Гессе, составленной из вторых частных производных функции f. Выпуск y обычно выражается в натуральном виде - если фирма выпускает одну единственную продукцию, или в денежном - в виде суммарной стоимости всей выпускаемой продукции. Второй подход будет основным в дальнейшем. Таким образом, y есть доход фирмы или выручка за реализованную продукцию. По смыслу производственной функции $f(0)=0$.

Через P обозначим вектор цен на ресурсы, в т.ч. на живой труд и на содержание единицы основных фондов. Будем предполагать цены неизменными. Величина $f(X)-PX$, т.е. выручка минус затраты, есть прибыль фирмы и обозначается $I(X)$.

Пусть фирма расходует вектор ресурсов $X=(x_1,...,x_n)$ (это вектор-столбец!) - будем говорить, что фирма находится в состоянии X. Величина $\partial f/\partial x_i$, где частная производная взята в точке X называется предельным i-м доходом (в состоянии X). Содержательно это означает, что вовлечение в состоянии X еще одной единицы i-го ресурса приносит дополнительно доход в количестве $\partial f/\partial x_i$ единиц. Следовательно, если $(\partial f/\partial x_i)>p_i$, то переработка и реализация i-го ресурса создает добавленную стоимость, которую будем обозначать $AC_i(X)$ (AC - additional cost).

Важно отметить, что в состоянии X не только вовлечение в производство еще одной единицы i-го ресурса приносит дополнительно доход в количестве $\partial f/\partial x_i$, но это верно для любой единицы этого ресурса – в частности, из-за неразличимости в этой теории различных единиц ресурса, в т.ч. живого труда. Следовательно, i-й ресурс, потребляемый в количестве x_i, создает добавленную стоимость в размере

$AC_i = ((\partial f / \partial x_i) - p_i)x_i$.

I.2. Равновесные и неравновесные состояния фирмы. Естественно считать, что расходуемые за цикл производства материалы (оборотные фонды) переносят свою стоимость на продукцию если и не по покупным ценам, то с незначительным их превышением, т.е. они создают небольшую добавленную стоимость, которой можно пренебречь. Таким образом, будем считать, что только живой труд и основные фонды создают добавленную стоимость.

Обозначим величину живого труда L, зарплату единицы труда за цикл q, размер основных фондов K, стоимость содержания их единицы за цикл r (амортизационные отчисления), сохраним за остальными ресурсами (оборотными фондами) и ценами на них обозначения Z, p. Предположим, что в течение цикла предприятие закупает только расходуемые материалы, а выбывающие основные фонды пополняет за счет амортизационных отчислений.

В состоянии равновесия фирмы X^* для любого ресурса выполняется предельное соотношение $\partial f / \partial x_i = p_i$, т.е. никакой ресурс, в т.ч. живой труд, не создает добавленной стоимости. Отсюда следует также, что предельная величина прибыли равна 0, а предельная величина выручки совпадает с зарплатой единицы рабочей силы и амортизационными отчислениями в расчете на единицу основных фондов.

Если же равновесное состояние фирмы X^* не достигнуто, т.е. $X \le X^*, X \ne X^*$, то в силу вогнутости производственной функции $(\partial f / \partial L) \ge q$, т.е. живой труд создает добавленную стоимость, всего в размере $AC_L = ((\partial f / \partial L) - q)L$. Это и есть то, что Маркс называл прибавочной стоимостью. В расчете на единицу труда прибавочная стоимость равна $(\partial f / \partial L) - q$ и уменьшается к нулю при приближении к состоянию равновесия в силу отрицательности второй частной производной $\partial^2 f / \partial L^2$, так что степень эксплуатации работников также уменьшается с приближением к состоянию равновесия фирмы (степенью эксплуатации назовем отношение прибавочной стоимости, создаваемой работником к его зарплате). В состоянии равновесия фирмы живой труд не создает прибавочной стоимости. Предполагается, что в стабильной экономике каждая фирма находится в равновесии, следовательно, живой труд не создает прибавочной стоимости и нет эксплуатации работников. Возможно, такой вывод кажется непривычным, но вспомним “золотое правило“ приема на работу в фирму нового работника: его следует принимать только если приносимая им польза превышает его зарплату (в контексте данной заметки – только если он приносит прибавочную стоимость)!

I.3. Органическое строение капитала по Марксу. В первом томе «Капитала» Маркс неоднократное обращается к этому понятию. По Марксу это понятие (он его также называет стоимостным строением капитала)- это соотношение между суммарной стоимостью средств производства и стоимостью рабочей силы (суммарной зарплаты, выплачиваемой работникам). Пожалуй, наиболее близким экономико-математическим понятием является производственная функция Кобба-Дугласа $y = AK^a L^b$, в которой A, a, b - положительные константы, причем причем $a + b$ £ 1, а K - объем производственных фондов, L - объем используемых трудовых ресурсов, y - выпуск продукции. K, L, y могут измеряться как в натуральном , так и в денежном выражении. Обычно говорят, что параметры a, b имеют смысл эластичностей выпуска по фондам и труду соответственно. Т.е., если, например, $a = 1/2$, $b = 1/3$, то при увеличении объема фондов на 1% выпуск продукции возрастет на ½%, а при увеличении объема используемых трудовых ресурсов на 1% выпуск продукции вырастет на 1/3%.

Но есть и другое толкование смысла этих параметров. Найдем частную производную от выпуска y по фондам K : $¶y/¶K = AaK^{a-1}L^{b}$, тогда $K \cdot ¶y/¶K = a\ y$. Аналогично, $L \cdot ¶y/¶L = b\ y$. Рассуждая как в пп. I.1, I.2 получаем, что вклад фондов в выпуск продукции (в денежном выражении) составляет долю a , а вклад трудовых ресурсов – долю b - см. также далее п. I.4.

Пусть зарплата равна q, стоимость содержания основных фондов (норма амортизации) равна r , стоимостью оборотных фондов пренебрежем. Перераспределим затраты на амортизацию и на зарплату для максимизации выпуска продукции,т.е. решим задачу

$$K^{a}L^{b} \to \max$$

$$rK + qL = Const.$$

Получаем

$aK^{a-1}L^{b} - bK^{a}\dfrac{r}{q}L^{b-1} = 0$, $K^{a-1}L^{b-1}(aqL - brK) = 0$, т.е. должно быть выполнено условие $a\ qL = b\ rK$ или $L/K = b\ r/(a\ q)$.Это условие максимально хорошего соотношения между основными фондами и трудовыми ресурсами при неизменных суммарных затратах на амортизацию основных фондов и зарплату-т.е. это, в каком-то смысле ,условие максимально хорошего органического строения капитала в духе Маркса.

Подобное же условие можно сформулировать и для многоресурсной, фирмы, использующей много ресурсов, не только два-живой труд и основные фонды. Получим следующий замечательный вывод в теории фирмы:

Для фирмы существует оптимальное распределение средств на закупку ресурсов, максимизирующее доход фирмы.

Конечно, этот вывод очевиден в силу неперывности производственной функции и компактности множества векторов- возможных распределений выделяемых средств на закупку ресурсов(этот вывод сделан в [6]). Будем считать, что фирма всегда использует указанную оптимизацию, тогда можно сделать еще один важный вывод:

Многоресурсная фирма фактически может вести себя, как одноресурсная, распоряжающаяся только одним ресурсом – своим бюджетом- деньгами на закупку необходимых ресурсов, закупаемых в оптимальных количествах.

Да в действительности так и происходит.

I.4. Распределение добавленной стоимости (прибыли) фирмы. Рассмотрим теперь один частный, но важный случай, когда производственной функцией является только что описанная функция Кобба-Дугласа $y = AK^{a}L^{b}$. Пусть $(a + b) = 1$, тогда функция Кобба-Дугласа является линейно однородной, т.е. $A(lK)^{a}(lL)^{b} = lAK^{a}L^{b}$, откуда следует, что $I = (\partial y/\partial K)K + (\partial y/\partial L)L$. Т.е. выручка в данном случае распадается на созданную основными фондами $AC_{K} = (\partial y\partial K)K = a\ y$ и живым трудом $AC_{L} = (\partial y/\partial L)L = b\ y$. Первая точно должна включаться в доход капиталиста, вторая включается в доход рабочих обычно лишь частично, так как обычно превышает зарплату qL (если не перейдено состояние равновесия). В состоянии равновесия $\partial y/\partial K = r$, $¶y/¶L = q$ - выручка, приходящаяся на основные фонды включается в доход капиталиста (возмещая ему амортизационные отчисления, часть этой выручки есть плата капиталисту за предпринимательский риск), а выручка, приходящаяся на рабочих полностью составляет их зарплату, т.е. опять таки нет эксплуатации (см. также [2]).

Если же линейной однородности нет, т.е. $(a + b < 1)$, то прибыль фирмы равна $I = AK^{a}L^{b}(1 - a - b) = y(1 - a - b) > 0$.Таким образом, в этих условиях возникает синергетический эффект – фирма зарабатывает больше, чем «рабочие» и «капиталист». Как прибыль должна быть «справедливо» распределена между «рабочими» и «капиталистом»? В таком распределении нам поможет вектор Шепли.

Это понятие родилось и нашло широкое распространение в теории кооперативных игр. Вектор Шепли дает численную оценку «силы» каждого члена группы игроков и предлагает правило раздела всего заработка организации между ее членами. При этом учитывается, в какие коалиции данный член группы может входить и насколько он эти коалиции усиливает - это в точности учет «влиятельности» и «наличия связей» этого члена группы. Насчет связей понятно - надо чтобы этот член группы «пришелся ко двору» - был очень нужен, позволил бы увеличить эффективность работы! Усиление означает увеличение заработка соответствующей коалиции.

Компоненты вектора Шепли даются формулой (см., например, [3]):

$$f(i) = \sum_{i \in T \subset G} [(t-1)!(n-t)!/n!][v(T) - v(T \setminus \{i\})]. \qquad (1)$$

Поясним смысл входящих в эту формулу величин. Здесь n - число членов рассматриваемой группы, t - число членов коалиции T, в которую входит рассматриваемый член i группы, $v(A)$ обозначает выигрыш, который может обеспечить себе (произвольная) коалиция A, следовательно, $v(T) - v(T \setminus \{i\})$ - это дополнительный выигрыш, который может обеспечить член i при вхождении его в коалицию $(T \setminus \{i\})$ (тем самым она превращается в коалицию T), и, наконец, $f(i)$ и есть то самое количественное выражение силы члена i группы.

В нашей ситуации группа состоит из двух членов : коллектива рабочих с одной стороны и капиталиста с другой, так что $n = 2$. Пусть рабочие образуют участника под номером 1, а капиталист – под номером 2. Группу «рабочие»+ «капиталист» обозначим G. Из вышеизложенного вытекает, что на «рабочих» приходится суммарный заработок $v_1 = L\partial y / \partial L = b\ y,$, а на «капиталиста» - $v_2 = K\partial y / \partial K = a\ y$. Коалиция $G \setminus \{1\}$ есть $\{2\}$, коалиция $G \setminus \{2\}$ есть $\{1\}$, следовательно, $v(G \setminus \{1\}) = v_2 = ay, v(G \setminus \{2\}) = v_1 = b\ y$. Вся группа зарабатывает всю выручку y. Но как они должны ее разделить? Для «рабочих»- участника N 1, в формуле (1) два слагаемых, отвечающих коалициям $\{1\}, G$, так что компонента вектора Шепли для «рабочих» равна

$$\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}(y - v_2) = \frac{y}{2}[1 + (b - a)],$$

где первое слагаемое есть $\frac{1}{2}(v(\{1\} - v(\varnothing)) = \frac{1}{2}v(\{1\})$, $\varnothing$ обозначает пустую коалицию и $v(\varnothing)$ полагается равной 0. Для «капиталиста» компонента вектора Шепли равна

$$\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}(y - v_1) = \frac{y}{2}[1 + (a - b)].$$

Вспомним, что a, b есть, соответственно, эластичности выпуска продукции по фондам и по труду- так что больше должна получить та из сторон, которая сильнее влияет на выпуск продукции. Что касается прибыли I, то «рабочие» должны из нее получить

$$\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}(y - v_2) - v_1 = \frac{1}{2}y(1 - (a + b)) = I/2,$$

т.е. половину этой прибыли. Столько же должен получить и «капиталист». Итак, «рабочие» и «капиталист» должны разделить прибыль – полную добавленную стоимость, пополам.

II. Двойственность в линейном программировании и «теневые цены» ресурсов. Одной из основных задач в экономике является задача оптимального линейного производственного планирования (ОЛПП). Ее формулировка такова:

II.1. Задача ОЛПП. Рассмотрим предприятие, которое из m видов ресурсов (далее просто ресурсов) производит n видов продукции (далее просто продукции). Производство характеризуется нормами расхода, которые сведены в матрицу $A = (a_{ij})$, a_{ij} - количество единиц i-го ресурса, расходуемое на производство одной единицы j-ой продукции. В качестве важнейшего в число ресурсов входит и живой человеческий труд. От производства и последующей реализации единицы j-ой продукции предприятие получает прибыль c_j денежных единиц. Эти удельные прибыли сведены в вектор-строку $C = (c_j)$ удельных прибылей. Предприятие имеет некоторые запасы ресурсов: пусть b_i - запас i-го ресурса. Величины запасов образуют вектор-столбец $B = (b_i)$. Чтобы узнать, сколько и каких ресурсов нужно на производственный план $X = (x_j)$ (далее просто план) нужно матрицу норм расхода умножить на вектор-столбец плана, получим AX. План X называется допустимым, если имеющихся запасов ресурсов для него хватит, т.е. если $AX \le B$. Сама задача ОЛПП в матрично-векторной форме записывается так

$$P(X) = CX \to \max$$

$$AX \le B,\ X \ge 0.$$

Словами это можно сказать так: найти допустимый план, который из всех допустимых планов дает максимальную прибыль. Такой план называется оптимальным.

Задача ОЛПП другими словами формулируется как задача наилучшего использования имеющихся ресурсов (ОИР).

Понятно, что, может быть, не в такой четкой постановке задачу ОЛПП (или ОИР) решают ежедневно миллионы людей по всему свету- прежде всего малый и средний бизнес- именно поэтому эта задача считается важнейшей экономической задачей. С чисто математической точки зрения задача ОЛПП относится к задачам линейного программирования (ЛП)- так называются задачи нахождения экстремумов линейных функций при линейных же ограничениях на переменные. С гордостью отметим, что родиной ЛП является СССР. В 30-х годах 20-го века советский ученый математик-экономист Леонид Витальевич Канторович открыл этот класс задач, а также научился решать некоторые типы задач ЛП. В самом начале своих исследований он понял большую практическую важность этих задач. За открытие класса задач ЛП в 1975 г. он получил Нобелевскую премию по экономике (вместе с американцем Т.Купмансом). Рассмотрим пример:

Матрица норм расхода $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, строка удельных прибылей $C = (30, 28, 9, 23)$, столбец запасов ресурсов $B = \begin{pmatrix} 110 \\ 126 \\ 114 \end{pmatrix}$. На столбцы матрицы норм расхода можно взглянуть как на описание технологий переработки ресурсов . Так 1-й столбец описывает 1-ю технологию: «смешивая» ресурсы $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, получаем одну единицу 1-й продукции. Задача ОЛПП в векторно-матричной форме

$$P(X) = CX \to \max$$

$$AX \le B, X \ge 0,$$

в развернутой форме

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4)=30x_1+28x_2+9x_3+23x_4 \to \max$$
$$x_1 \;+2x_3+5x_4 \le 110$$
$$3x_1 \;+6x_2+4x_4 \le 126$$
$$2x_1 \;+4x_2+x_3+3x_4 \le 114$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0.$$

Оптимальное решение есть $x_1^*=42, x_2^*=0, x_3^*=30, x_4^*=0, P_{\max}=1530$.

II.2. Задача торга. Представим теперь, что к Владельцу предприятия пришел Покупатель и предложил продать ему ресурсы. В нормальной экономике не может быть категорических решений: нет, не продам и все ,или, да забирай их даром. Почему не продать, едси будет предложена хорошая цена. Начался торг по поводу цен на ресурсы: y_1,y_2,y_3. Покупатель, естественно, хотел бы заплатить за ресурсы поменьше

$$S(y_1,y_2,y_3)=110y_1+126y_2+114y_y \to \min.$$

Но и у Владельца есть свои резоны. «Посмотрите», говорит он Покупателю- «Я перерабатываю $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ -такие количества ресурсов по 1-й технологии и получаю «чистыми» 30 (рублей, долларов, фунтов и т.п. денежных единиц- тех самых, в которых выражены удельные прибыли). Было бы справедливо, если бы за эти ресурсы Вы дали бы мне не меньше»:

$$y_1+3y_2+2y_3 \ge 30.$$

Возникает задача

$$S(y_1,y_2,y_3)=110y_1+126y_2+114y_3 \to \min$$
$$y_1+3y_2+2y_3 \ge 30,$$
$$6y_2+6y_3 \ge 28,$$
$$2y_1+y_3 \ge 9,$$
$$5y_1+4y_2+3y_3 \ge 23,$$
$$y_1,y_2 y_3 \ge 0.$$

Как легко видеть, это – тоже задача ЛП. Это и есть задача торга. Она называется двойственной к исходной задаче ОЛПП. Ее оптимальное решение есть $y_1^*=0, y_2^*=4, y_3^*=9, S_{\min}=1530$. Выпишем рядом обе задачи в матрично-векторном виде:

Задача ОЛПП	Задача торга
$P(X)=CX \to \max$	$S(Y)=YB \to \min$
$AX \le B, X \ge 0$	$YA \ge C, Y \ge 0$

(A- матрица, C,Y -векторы-строки, B,X -векторы-столбцы).

Эта пара задач обладает определенной симметрией и так и называется симметричной парой двойственных задач. Эти задачи являются двойственными друг другу. Для различения левую задачу – задачу ОЛПП называют еще прямой, а правую – задачу торга – двойственной.

Переменные y_1,y_2,y_3, т.е. переменные двойственной задачи называются двойственными переменными, а их оптимальные значениями называются двойственными оценками ресурсов. Канторович называл их объективно обусловленными оценками (о.о.о.) или теневыми ценами ресурсов. Теория двойственности была создана, в основном, Дж. фон Нейманом. В ее основе лежат три теоремы. Приведем формулировку двух из них: первой и третьей.

Первая теорема двойственности. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное значение и экстремальные значения целевых функций равны.

Третья теорема двойственности. Если в оптимальном плане исходной задачи все базисные переменные строго положительны, то двойственная оценка ресурса равна увеличению максимальной прибыли при дополнительном вовлечении в производство еще одной единицы этого ресурса.

Из первой теоремы двойственности вытекает, что Продавец и Покупатель договорятся и сделка купли-продажи ресурсов состоится. Но посмотрите - по лезвию бритвы идет экономика: на сумму меньшую 1530 не согласится Продавец, а сумму, большую чем 1530 Покупателю нецелесообразно предлагать!

Из третьей теоремы вытекает, что

$$\frac{\partial P_{\max}}{\partial x_i} = y_i^* , \qquad (2)$$

так что, рассуждая аналогично п.I, получаем, что $y_i^* x_i$ есть вклад в прибыль i-го ресурса.

В свое время Канторович возлагал большие надежды на изучение и использование в экономической науке- и в теории и на практике о.о.о., видя в них весьма полезный инструмент, чуть ли не замену классической марксовой стоимости. К сожалению, эти надежды оказались преувеличенными. Математики (и, конечно, и Канторович) понимают в чем тут дело. Во-первых, двойственные оценки ресурсов показывают ценность этих ресурсов для предприятия, к цене этих ресурсов на «больших» внешних рынках эти оценки имеют мало отношения. Во-вторых, соотношение (2) верно лишь при некоторых условиях – см. формулировку третьей теоремы. В-третьих, двойственная оценка ресурса вполне может оказаться нулевой – эту ситуацию надо будет уметь объяснить!

Сосредоточимся теперь на важнейшем ресурсе – живом человеческом труде. Предположим, что в нашей формальной схеме двойственная оценка рассматриваемого ресурса положительна. Отсюда следуют два вывода:

1.Данный ресурс является дефицитным, т.е. по оптимальному плану весь его запас будет израсходован;

2. Внутреняя цена этого ресурса (его двойственная или о.о.) оценка y^* равна прибавлению максимальной прибыли от дополнительного вовлечения в производство еще одной единицы этого ресурса.

Следовательно, если зарплата одной единицы труда равна q, то величину $y^* - q$ можно трактовать как прибавочную стоимость, приходящуюся на единицу труда.

III. Межотраслевой баланс и марксова теория стоимости. Идея межотраслевого баланса впервые была сформулирована в работах советских экономистов в 20-х годах и получила затем развитие в трудах американского экономиста (русского эмигранта) В.В.Леонтьева.

III.1. Описание модели межотраслевого баланса. Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Чистая отрасль - это условное понятие - некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная. Например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.п.

Пусть a_{ij} - количество продукции i-й отрасли, расходуемое на производство единицы продукции j -й отрасли. Матрица $A=(a_{ij})$ содержит весьма много информации. Так, ее i-я строка характеризует использование продукции i-й отрасли по всему народному хозяйству, а j-й столбец характеризует j-ю отрасль : что и в каких количествах она использует.

Для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева сделаем два важных предположения.

Первое состоит в том, что сложившуюся технологию производства считаем неизменной. Таким образом матрица A постоянна.

Второе состоит в постулировании свойства линейности существующих технологий. Т.е. для выпуска j-й отраслью продукции объема x_j надо ресурсов (т.е. продукции других отраслей) в количестве $\sum_i a_{ij}x_j = x_j \sum_i a_{ij}$. Это требование означает, в частности, что каждая отрасль способна произвести любой обьем своей продукции при условии, что ей будут обеспечены ресурсы в необходимом количестве. На самом деле это, конечно, не так, ибо производственные возможности всякой отрасли ограничены имеющимся объемом трудовых ресурсов и основных фондов, увеличить которые быстро не всегда возможно.

Есть много общего в рассматриваемой ситуации с задачей оптимального планирования или оптимального использования ресурсов. В частности, пусть $X = (x_j)$ - вектор-столбец объемов производства в отраслях, тогда AX - потребляемые в производственной сфере объемы продукции этих отраслей. Таким образом, вне производственной сферы - на потребление остается только $C = X - AX$. В дальнейшем, исходя из экономического смысла, матрицу, задающую модель Леонтьева, считаем неотрицательной.

II.2. Продуктивность модели Леонтьева. Пусть потребность непроизводственной сферы выражается вектором С. Пусть $X = (x_j)$ обозначает вектор валового производства, тогда AX есть израсходованные в процессе производства ресурсы и для непроизводственной сферы остается $C = X - AX$. Существует ли вектор производства обеспечивающий это, т.е. удовлетворяющий уравнению $C = X - AX$? Разумеется, учитывая экономическую интерпретацию, этот вектор производства должен быть неотрицательным.

Поэтому говорят что модель Леонтьева продуктивна, если уравнение $C = X - AX$ имеет неотрицательное решение для любого $C \geq 0$, т.е. матрица A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

III.3. Прямые и полные затраты в модели Леонтьева. Напомним, что модель задается матрицей А прямых затрат. В этой матрице a_{ij} -это количество единиц продукции i -й отрасли, расходуемое на изготовление, производство одной единицы продукции j -й отрасли. Числа a_{ij} называются коэффицентами прямых затрат j-й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Но на производство C надо израсходовать AC ресурсов. Однако на их производство надо в свою очередь затратить $A(AC) = A^2C$ ресурсов, а для их производства еще израсходовать $A(A^2C) = A^3C$ и т.д. Полные затраты, таким образом, есть сумма бесконечного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} A^iC$. Но члены этого ряда – конечномерные векторы-столбцы, поэтому сумма этого ряда находится как вектор сумм 1-х, 2-х и т.д. компонент векторов A^iC. Однако можно доказать, что если сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} A^iC$ существует, то ее можно вычислить как произведение $(E - A)^{-1}C$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A^iC = (E - A)^{-1}C \qquad (3)$$

Обратите внимание на аналогию с формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$b + bq + bq^2 + ... = \sum_{i=1}^{\infty} bq^i = b/(1 - q).$$

Но эта формула верна если только если $|q| < 1$. Нечто подобное имеет место и для формулы (3). Можно доказать также, что модель Леонтьева продуктивна, если она позволяет произвести хоть какой - нибудь строго положительный вектор потребления: из этого вытекает, что можно произвести и любой неотрицательный вектор потребления. Важно также, что если матрица A продуктивна, то $(E - A)^{-1} > 0$.

III.4. Теория трудовой стоимости Маркса в модели Леонтьева. Вопросы использования и распределения трудовых ресурсов являются чрезвычайно важными, поскольку их решение во многом определяет эффективность общественного производства. В модели Леонтьева эти вопросы получают своеобразное освещение .

Сопоставим каждой i-й отрасли число $l_i > 0$, выражающее потребные затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности данного технологического процеса. В зависимости от цели моделирования числа l_i , $i = 1,\dots,n$, могут измеряться либо в человеко-днях (человеко-часах), либо просто числом работающих. Пусть $L = (l_1,\dots,l_n)$ - вектор-строка трудовых ресурсов при единичной интенсивности технологических процессов (отраслей). Ясно, что $L \ge 0$. После введения вектора L трудовых ресурсов (затрат) модель Леонтьева можно представить парой (A,L) . Если общий обьем трудовых ресурсов народного хозяйства равен T_0 , то получим

следующую экстремальную задачу: Пусть вектор C задает не потребление в непроизводственной сфере, а лишь его пропорции, так что aC - это число некоторых комплектов и это число нужно максимизировать. Поэтому будем считать, что $|C| = 1$. Расмотрим следующую задачу составления оптимального плана,

$$\begin{aligned} & a \to \max \\ & X - AX \ge aC, \\ & L \cdot X \le T_0, \\ & X, a \ge 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Напомним, что X, C -векторы-столбцы, L - вектор-строка, a, T_0 - числа. Если матрица A продуктивна, то задача (2) допустима, т.е. ее допустимое множество не пусто. В самом деле, в силу продуктивности уравнение $X - AX = C$ имеет неотрицательное решение X_0.

Поскольку $T_0 > 0$, существует $a_0 > 0$, такое, что $L \cdot (a_0 X_0) \le T_0$. Следовательно, вектор $a_0 X_0$ принадлежит допустимому множеству задачи (2). Но ясно, что X ограничено на допустимом множестве (поскольку каждое $l_i > 0$, то каждая компонента X ограничена).Отсюда вытекает и ограниченность a , так что по основным теоремам линейного программирования задача (4) имеет оптимальное решение. При этом максимальное значение a не меньше a_0 и потому это максимальное значение положительно.

Построим к задаче (4) двойственную, для чего запишем задачу (4) нужным образом:

$$\begin{array}{lll} a \to \max & qT_0 \to \min & qT_0 \to \min \\ aC - (E - A)X \le 0, \; | \; P \ge 0 & PC \ge 1, \qquad | \; a & PC \ge 1, \\ LX \le T_0, \qquad\quad | \; q \ge 0 & qL - P(E - A) \ge 0, | \; X \quad \text{или} & qL \ge P(E - A), \\ X, a \ge 0. & P, q \ge 0. & P, q \ge 0. \end{array}$$

Здесь P - вектор-строка, а q - число, P, q - двойственные переменные.

Согласно теории двойственности, вектор P и число q можно трактовать как вектор объективно обусловленных цен товаров и трудовых ресурсов.

Из свойств матрицы A вытекает, что $(E - A)^{-1} > 0$.

Оптимальные решения исходной и двойственной задач обозначим X^*, a^* и P^*, q^*.

Можно доказать, что, так как C ³ $0, C$ ¹ 0, то любой вектор X, участвующий в задаче (2) строго положителен, так что $X^* > 0$. Уже было выяснено, что $a^* > 0$. Следовательно, по 1-й и 2-й теоремам двойственности имеем: $q^* T_0 (= a^*) > 0$ и потому $q^* > 0$. Далее $LX^* = T_0, q^* L = P^*(E - A)$, $P^* C = 1, q^* L = P^*(E - A)$. Из последнего равенства имеем $P^* = q^* L(E - A)^{-1}$. Желая найти q^*, подставим найденное P^* в равенство $P^* C = 1$, получим $q^* L(E - A)^{-1} C = 1$, так что $q^* = 1/[L(E - A)^{-1} C]$. Теперь можно найти и P^*: $P^* = \dfrac{L(E - A)^{-1}}{[L(E - A)^{-1} C]}$ (сокращать эту дробь нельзя!).

Каков экономический смысл полученных решений ? Так как $P^* C = 1$, то стоимость (цена) одного комплекта равна 1, значит a^* - цена a^* комплектов товаров. С другой стороны $q^* T_0$ есть общая заработная плата, выплаченная за T_0 единиц труда по цене q^* за каждую единицу. Таким образом, равенство $a^* = q^* T_0$ выражает равенство спроса и предложения в стоимостном выражении – цена выпущенного объема конечной продукции равна общей сумме денег, полученной людьми, участвующими в процессе производства, в качестве заработной платы.

Напомним далее, что j-я компонента вектора L, а именно, l_j есть трудовые затраты при выпуске одной единицы продукции j-й отрасли. Но, чтобы ее выпустить, надо сначала сделать $a_{ij} l_j$ единиц каждой i-й продукции и т.д. (см. п. 3). В итоге получим, что вектор $L(E - A)^{-1}$ есть вектор полных трудовых затрат при производстве единицы продукции каждой отрасли . А теперь вспомним, что $P^* = \dfrac{L(E - A)^{-1}}{[L(E - A)^{-1} C]}$, т.е. цены пропорциональны полным трудовым затратам.

Этот вывод привлекал и привлекает внимание многих видных экономистов, ибо он явно перекликается с трудовой теорией стоимости Маркса, которая утверждает, что в основе стоимости товара лежит количество общественно необходимого труда, потребного для производства товара.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Колемаев В.А. Математическая экономика. -М.:ЮНИТИ, 2002
2. Карманов В.Г., Математическое программирование, М., «Наука», 1975.
3. Оуэн Г. Теория игр. - М.: Мир, 1971
4. Паршев А.П. Почему Россия не Америка.- М.: Крымский мост, 2002.
5. Хакен Г., Синергетика, М.:1980.
6. Дроздов Н.Ю., В.И.Малыхин. Автосинергизм в теории фирмы, Вестник университета (ГУУ), серия развития отраслевого и регионального управления, № 3(3), Москва, ГУУ, 2007, стр. 293-295.