**Долгополова А.Ф.,** к.э.н., доцент
Ставропольского
государственного аграрного университета
**Морозова О.В.,** к.э.н., доцент
Ставропольского
государственного аграрного университета

# Применение марковских процессов при решении социально-экономических задач

*В представленной статье изложен материал, позволяющий проводить исследования актуальных социально-экономических проблем современности с использованием математического аппарата, в частности, марковских процессов. В работе рассмотрены основные теоретические аспекты марковских процессов, предложен пример на использование управляемых цепей Маркова, а также построена имитационная модель регулирования финансовых потоков региона.*

В настоящее время при решении социально-экономических задач все более актуальным становится применение специальных математических методов, позволяющих достаточно точно описать функционирование экономических систем. Наиболее достоверно социально-экономические задачи современности могут быть описаны при помощи случайных процессов, одним из которых является Марковский случайный процесс.

Благодаря сравнительной простоте и наглядности математического аппарата, высокой достоверности и точности получаемых решений, особое внимание Марковские процессы приобрели у специалистов, занимающихся исследованием операций и теорией принятия оптимальных решений.

Действительно, случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется Марковским, если для любого момента времени $t_0$ вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Марковские процессы можно классифицировать в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра $t$.

В теории случайных процессов выделяют следующие основные виды Марковских случайных процессов: с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова); с непрерывными состояниями и дискретным временем (Марковские последовательности); с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова); с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Большое значение в практических задачах имеют Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Марковские процессы (процессы без последействия) играют огромную роль в моделировании систем массового обслуживания (СМО), а также в моделировании и выборе стратегии управления социально-экономическими процессами, происходящими в обществе.

В качестве примера мы предлагаем рассмотреть управляемые цепи Маркова.

Предприятие, выпускающее определенный вид продукции, находясь в состоянии 1, может увеличить спрос путем организации рекламы. Это требует добавочных затрат и уменьшает доход. В состоянии 2 предприятие может увеличить вероятность перехода в состояние 1 путем увеличения затрат на исследования. Выделим две стратегии. Первая состоит в отказе от затрат на рекламу и исследования, а вторая - в согласии на них. Пусть матрицы переходных вероятностей и матрицы доходов для данных стратегий имеют вид:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad R_1 = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{bmatrix}$$

В рассмотренной ситуации имеет место управляемая цепь Маркова. Управление соответствует выбору стратегии.

Пусть каждому состоянию $i \in S = \{1,\ldots,N\}$ соответствует конечное множество $K_i$ решений (или альтернатив), элементы которого обозначим номерами $1,\ldots,k_i$. Пространством стратегий K называется прямое произведение множеств решений $K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_N$.

Пусть в i-м состоянии имеется не одно, а $k_i$ множеств переходных вероятностей $\{p_{ij}^l\}, l = \overline{1,k_i}$. При $|K_i| = 1$ имеем случай неуправляемой цепи Маркова. Если система находится в состоянии $i \in S$ и принимается решение $k \in K_i$ то

- она получает доход $r_i^k$;

- ее состояние в следующий момент времени определяется вероятностью $p_{ij}^k$, где $p_{ij}^k$ - вероятность того, что система из состояния $i \in S$ при выборе решения $k \in K_i$ перейдет в состояние $j \in S$.

Таким образом, смысл $k$*-го* решения в i-м состоянии заключается в выборе одного набора переходных вероятностей $\{p_{ij}^k\}$ из $K_i$ возможных. Предполагается, что доход $r_i^k$ ограничен при всех $i \in S$ и $k \in K_i$.

Кроме того, $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k = 1, \quad p_{ij}^k \ge 0$ при всех $i, j \in S$ и $k \in K_i$.

*Управляемой цепью Маркова* называется конструкция, задаваемая параметрами $< K, P, r >$, где *K*-решения, *P*-вероятности переходов, *r*-доходы.

Доход, полученный за несколько шагов, является случайной величиной, зависящей от начального состояния и принимаемых в каждый момент времени решений.

Назовем решение, принимаемое в конкретный момент, частным управлением. Тогда управление есть последовательность решений в моменты n = 1, 2, ... Качество управления можно оценить средним суммарным доходом (при конечном времени) или среднем доходом в единицу времени (при бесконечном времени).

Пусть $f = < k_1, ..., k_N > \in K$ (1)

*Стратегией* $p$ называется последовательность решений

$$p = (f_1, ..., f_n, ....)$$

где $f_n$- вектор вида (1), i-я компонента которого, обозначаемая через $f_n(i)$, является решением, принимаемым в состоянии $i \in S$ в момент *n*. Другими словами, задание стратегии означает полное описание в каждый момент времени t =1, 2, ..., *n*, ... конкретных решений, которые должны были бы приниматься в i-м состоянии , если бы система находилась в нем в рассматриваемый момент.

Стратегия $(f, ..., f, ....)$ обозначается через $f^{\infty}$ называется *стационарной.* Стратегия $p = (f_1, ..., f_n, ....)$ называется *Марковской,* если решение $f_n$, принимаемое в каждом конкретном состоянии, не зависит от предшествующих состояний и принимавшихся в них решений. В случае Марковской стратегии решения $f_n$ могут зависеть только от момента времени *n*.

Обозначим произвольную конечную часть стратегии через ${}^n\pi = (f_1, ..., f_n)$. Пусть зафиксированы произвольная стратегия $p = (f_1, ..., f_n, ....)$некоторый момент времени *n*. Если в этот момент система находилась в состоянии $i \in S$, то в следующий *(n+1)*-й момент времени она будет находиться в состоянии $j \in S$ с вероятностью $p_{ij}^k$, где $k = f_n(i)$. Тогда матрица переходных вероятностей в момент *n* имеет вид

$$P = P(f_n) = \begin{bmatrix} p_{11}^{f_n(1)} & ... & p_{1N}^{f_n(1)} \\ ... & ... & ... \\ p_{N1}^{f_n(N)} & ... & p_{NN}^{f_n(N)} \end{bmatrix}$$

Таким образом, при фиксированной стратегии $p$ получаем цепь Маркова с матрицами перехода $P(n) = P(f_n), n = 1,2,3,...$

Обозначим ${}^n\Gamma({}^n p)$- вектор суммарных средних доходов, полученных до любого момента n включительно, для некоторой стратегии ${}^n p = (f_1, ..., f_n)$. Стратегия ${}^n p^* = (f_1^*, ..., f_n^*)$ максимизирующая ${}^n\Gamma({}^n p)$, то есть удовлетворяющая неравенству ${}^n\Gamma({}^n p^*) \geq {}^n\Gamma({}^n p)$ при любых ${}^n p = (f_1, ..., f_n)$ называется оптимальной.

Верны следующее утверждения:

Утверждение 1. *Для бесконечного времени существует оптимальная стационарная стратегия.*

Утверждение 2. *Для конечного времени существует оптимальная Марковская стратегия.*

Таким образом, решение (при бесконечном времени) зависит только от состояния, в котором находится система, и не зависит ни от момента времени, ни от всей предыдущей траектории последовательности состояний и принятых решений. В случае конечного времени оптимальная стратегия является Марковской, т. е. может зависеть еще и от момента времени принятия решения.

На основе Марковских процессов нами была разработана стационарная модель функционирования некоторого региона с бюджетом развития K единиц (K – целое число).

Предположим, что в течение некоторого промежутка (t, t+1) времени (финансовый год, квартал и т.д.) регион получает финансовое пополнение из федерального бюджета X(t) (x принимает так же как и t только целые значения). Мы допускаем, что величины X(t), отвечающие различным значениям t, независимы и одинаково распределены:

$$P\left[X(t)=r\right]=p_r \ (r=0,1,2,...), \sum_{r=0}^{\infty} p_r=1 \qquad (2)$$

Если к начальному моменту промежутка времени (t, t+1) регион обладал бюджетом Z(t) < K, причем если X(t) + Z(t) > K, то регион «отказывается» от привлечения денежных средств в размере X(t) + Z(t) – K, и к концу промежутка (t, t+1) регион полностью покрывает свои расходы.

Если же X(t) + Z(t) ≤ K, то количество привлекаемых средств сохраняется. В конце интервала (t, t+1) происходит полный расход денежных средств региона.

Расход денежных средств к этому моменту Y(t) подчинен следующему правилу: если X(t) + Z(t) ≤ M, где M (M < K) – заданное целое число – текущий бюджет региона, то забирается M единиц и остается Z(t+1) = X(t) + Z(t)-M, при X(t) + Z(t) < K или Z(t+1) = K – M, если X(t) + Z(t) = K.

Если же X(t) + Z(t) ≤ M, то расходуются все денежные средства и Z(t+1) = 0. Мы видим, что величина Z(t+1) полностью определена с вероятностной точки зрения, если известны значения Z(t), независимо от того, что происходило в предшествующее время (величины X(t) независимы по предположению). Поэтому, для Z(t) мы будем иметь процесс Маркова с возможными состояниями 0, 1, 2, …, K – M.

Рассмотрим таблицу переходных вероятностей.

| $Z(t)$ \ $Z(t+1)$ | 0 | 1 | 2 | … | K – 2M | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $q_M$ | $p_{M+1}$ | $p_{M+2}$ | … | $p_{K-M}$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $q_{M-1}$ | $p_M$ | $p_{M+1}$ | … | $p_{K-M-1}$ | |
| … | … | … | … | … | … | |
| M | $q_0 = p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_{K-2M}$ | |
| M+1 | 0 | $p_0$ | $p_1$ | … | $p_{K-2M-1}$ | |
| … | … | … | … | … | … | |
| K – M | 0 | 0 | 0 | … | $p_0$ | |

Здесь $q_r = \sum_{i=1}^{r} p_i$; кроме того, мы допустили, что K>2M. Сумма вероятностей в каждой строке равна 1.

Чтобы от Z(t) = r$\leq$M перейти к Z(t+1) = 0, нужно, чтобы расход денежных средств был не больше (M-r), вероятность чего равна $p_0 + p_1 + ... + p_{M-r} = q_{M-r}$ .Если же Z(t) = M + r, где r > 0, то не все денежные средства будут израсходованы и соответствующие переходы невозможны.

Точно также определяются и все остальные переходные вероятности, составляющие таблицу. Пользуясь ею, можно легко написать уравнение для определения вероятности $p_s(t)$ равенства $Z(t) = s$. В самом деле (на основании формулы полной вероятности) будем иметь, например, при s$\leq$K – 2M

$$p_s(t+1) = p_0(t)\,p_{M+s} + p_1(t)\,p_{M+s-1} + p_2(t)\,p_{M+s-2} + ... + p_{M+s}(t)\,p_0 \qquad (3)$$

Практически наиболее интересным является отыскание стационарного режима, который устанавливается в функционировании региона по истечении достаточно большого срока. Эта задача до конца решается лишь при довольно частных предположениях относительно распределения притоков денежных средств, т.е. относительно вероятности $p_s$.

Например, в предположении так называемого геометрического распределения, которое отвечает показательному распределению в случае дискретных процессов, когда для всех значений S

$$p_s = (1-B)\cdot B^s, \quad 0<B<1 \qquad (4)$$

(вероятности $p_s$ убывают в геометрической прогрессии). Можно показать, что стационарное распределение процесса $X(t)+Z(t)=U(t)$ в случае неограниченного финансирования принадлежит также классу геометрических распределений с параметром $\beta$, определяемым из уравнения

$$1-B = \frac{1-\beta}{1-\beta^{M+1}} \qquad (5)$$

Точно также может быть исследована и схема непрерывного процесса Маркова с непрерывным расходом и приходом финансовых средств.

В этом случае для нахождения функций стационарного распределения вероятностей получаем интегральное уравнение, которое в конечной форме решается лишь при частных предположениях. Но при каждом данном конкретном распределении вероятностей $p_s$ мы можем последовательно вычислять с помощью уравнений (3) вероятности $p_s(t)$ для t = 1, 2, 3, …, задаваясь некоторым произвольным начальным распределением $p_S(0)$. Проделав достаточно большое число итераций от вероятностей $p_s(t)$ к вероятностям $p_s(t+1)$, мы получим распределение достаточно близкое к предельному стационарному. В настоящее время эта задача достаточно легко разрешима при использовании современного программного обеспечения.

**Список литературы**

1. Боровков А.А., Эргодичность и устойчивость случайных процессов, Эдиториал УРСС, М., 1999, Изд-во Ин-та математики СО РАН, Новосибирск, 1999.
2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, Изд-во иностр. лит., М., 1962.
3. Дуб Дж.Л., Вероятностные процессы, Изд-во иностр. лит., М., 1956.
4. Жданюк А.И., Итерационные процессы, как цепи Маркова, Латв. мат. Ежегодник, 26, Зинатне, Рига, 1982, 153-164.
5. Ревюз Д., Цепи Маркова, Изд-во УРСС, Екатеринбург, 2007, 432с.
6. Соколов Г.А., Чистякова Е.А., Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике, М., 2005, 248 с.
7. Шур М.Г., «Инвариантные меры для цепей Маркова и феллеровские расширения цепей Маркова», Теория вероятностей и ее применения, 1981, 496-509.