

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РЕГИОНА РФ
ПРИ КОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ ПЛАНИРОВАНИЯ**

Исследована математическая модель региональной макроэкономики, основанная на производственной $B(x)$ -функции. Приводится задача оптимального управления региональным производственным процессом. Разработан новый экономичный алгоритм решения краевой задачи расчета оптимального управления и соответствующих ему оптимальных траекторий.

1. Оптимальное управление динамикой региональной экономической системы

Рассмотрим математическую модель макроэкономики региона, предложенную в работах [1, 2]:

$$\frac{dx}{dt} = aB(x) - Ix, \quad (1)$$

$$x(0) = x_1 = B \frac{mK(0)}{g(0)N(0)}, \quad x_1 \in (0, \infty), \quad (2)$$

$$i = c_i C_\infty B(x), \quad w = c_w C_\infty B(x), \quad y = C_\infty B(x), \quad (3)$$

$$B(x) = b(1 - e^{-x}) + (1 - b)x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) \quad (4)$$

с переменным во времени потреблением $w(t)$. Примем функцию $w(t)$ в качестве функции управления (управляющего “параметра”) в задаче оптимального управления региональной макроэкономикой организаторами производственного процесса.

Область допустимых значений функции управления можно представить как замкнутое множество

$$\bar{W} = \{ w(t) \in C[0, T] : w \in [w_1, w_2] \}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} w_1(t) &= p_1 B(x(t)), & w_2(t) &= p_2 B(x(t)), \\ p_1 &= c_{w1} C_\infty, & p_2 &= c_{w2} C_\infty, \end{aligned} \quad (6)$$

T – горизонт планирования динамики экономической системы.

В качестве функции полезности возьмем степенную зависимость $u(w) = w^a$, где $a \in (0, 1)$ – эмпирическая постоянная.

При решении задачи оптимального управления для конечного горизонта планирования в качестве функционала цели возьмем функционал [1]

$$J(w) = \int_0^T w^a(t) dt. \quad (7)$$

Уравнение (1) для фазовой переменной, определяющей траекторию развития экономической системы, можно представить в форме

$$\frac{dx}{dt} = aB(x) - Ix - pw, \quad (8)$$

здесь $a = qmC_\infty B$, $I = m+n+t$, $p = mB$. Рассмотрим задачу об отыскании оптимального управления $w^*(t) \in \bar{W}$ макроэкономической системой региона в следующем смысле:

найти управление $w(t) \in \bar{W}$, которое переводит систему (8) из одного фиксированного состояния $x(0) = x_1$ в другое фиксированное состояние $x(T) = x_2$ при условии, что интеграл (7) принимает максимальное значение.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\left. \begin{aligned} & \max_{w \in \bar{W}} \int_0^T w^a(t) dt \\ & \frac{dx}{dt} = aB(x) - Ix - pw \quad x(0) = x_1 \quad x(T) = x_2 \\ & B(x) = b(1 - e^{-x}) + (1-b)x \left(1 - e^{-\frac{1}{x}} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Отметим, что в задаче (9) момент времени T заранее не задан.

Введем функцию Гамильтона исследуемой задачи

$$H(x, y, w) = w^a + y[aB(x) - Ix - pw], \quad (10)$$

гамильтонову систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dx}{dt} = aB(x) - Ix - pw \\ & \frac{dy}{dt} = -[aB'(x) - I]y \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где $y(t)$ – сопряженная к $x(t)$ переменная.

Решение задачи (9) получим на основе принципа максимума Понтрягина [5–7], “основным содержанием которого” – Л. С. Понтрягин – является следующий факт. Если $w^*(t)$ – оптимальное управление рассматриваемой задачи (9), а $x^*(t)$, $y(t)$ – соответствующие ему траектории системы (11), то функция Гамильтона (10) удовлетворяет равенству

$$H(x^*(t), y(t), w^*(t)) = \sup_{w \in \bar{W}} H(x^*(t), y(t), w). \quad (*)$$

Введем постоянные $c_i = \frac{a}{p(p_i)^{1-a}}$ ($i=1, 2$), $p = \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{1}{1-a}}$, известные функции

$$y_1(x) = \frac{c_2}{B^{1-a}(x)}, \quad y_2(x) = \frac{c_1}{B^{1-a}(x)}.$$

Теорема 1. Пусть $w^*(t) \in \bar{W}$ – оптимальное управление задачи (9), $x^*(t)$, $y(t)$ – соответствующие ему решения гамильтоновой системы (11). Тогда между оптимальным управлением $w^*(t)$, соответствующими ему оптимальными траекториями фазовой и сопряженной переменных $x^*(t)$, $y(t)$ имеет место зависимость

$$w^*(t) = \begin{cases} p_2 B(x^*(t)) & \text{при } y(t) \leq y_1(x^*(t)) \\ p y^{-\frac{1}{1-a}}(t) & \text{при } y_1(x^*(t)) < y(t) < y_2(x^*(t)) \\ p_1 B(x^*(t)) & \text{при } y(t) \geq y_2(x^*(t)) \end{cases}. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть областью возможных значений фазовой и сопряженной переменных $x(t)$, $y(t)$ ($Ran x$, $Ran y$) гамильтоновой системы (11) задачи (9) является промежуток $R_+^1 = (0, \infty)$.

Рассмотрим внутренность множества \bar{W} – открытое множество W , т.е. $W = \{w(t) \in C[0, T] : w \in (w_1, w_2)\}$. Известно [7], что когда область управления является открытым множеством, рассматриваемая оптимальная задача эквивалентна задаче Лагранжа классического вариационного исчисления. Точка максимума $w^* \in W$ является стационарной точкой функции Гамильтона (25): $\left. \frac{\partial H}{\partial w} \right|_{w^*} = 0$, откуда получаем

$$y = p^{-1} a w^{*a-1}. \quad (13)$$

В соотношении (13) управление $w^*(t) \in W$, сопряженная переменная $y(t) \in \Psi$, где $\Psi = \{y(t) \in C^1[0, T] : y(t) \in (y_1, y_2)\}$, $y_1(t) = p^{-1} a w_2^{a-1} = \frac{c_2}{B^{1-a}(x(t))}$, $y_2(t) = p^{-1} a w_1^{a-1} = \frac{c_1}{B^{1-a}(x(t))}$. Заметим, что так как $a < 1$, то

$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right|_{w^*} < 0$. Таким образом, при любых фиксированных $x \in R_+^1$, $y \in \Psi$ функция

$w(t) = p [y(t)]^{-\frac{1}{1-a}}$ доставляет максимум функции Гамильтона (10) на множестве $w(t) \in W$.

Рассмотрим теперь множество $\Psi_1 = \{y(t) \in C^1[0, T] : y(t) \in (0, y_1]\}$. Пусть y произвольная точка множества Ψ_1 , т.е. $y = y_1 - a_1$, где $0 \leq a_1(t) < y_1(t)$, $a_1(t) \in C^1[0, T]$. Функция Гамильтона (10) в рассматриваемой точке $y \in \Psi_1$ равна

$$H(x, y, w) = w^a - p y w + y [a B(x) - I x] = w^a - p y_1 w + p a_1 w + y [a B(x) - I x] =$$

$$= w_1(w) + j_1(w) + y[aB(x) - I x],$$

где $w_1(w) = w^a \left[1 - a \left(\frac{w}{w_2} \right)^{1-a} \right]$, $j_1(w) = p a_1 w$.

Анализ функции $w_1(w)$ (производных w_{1w} , w_{1ww}) показывает, что $w_1(w)$ имеет максимум при $w = w_2$, функция $j_1(w) = 0$ при $a_1(t) = 0$ или имеет максимум в точке $w = w_2$, если $a_1(t) > 0$.

Таким образом, при любых фиксированных $x \in R_+^1$, $y \in \Psi_1$ функция $w_2(t) = p_2 B(x(t))$ доставляет максимум $H(x, y, w)$ на множестве $w(t) \in \bar{W}$.

Аналогично, рассмотрев $H(x, y, w)$ в произвольной точке $y \in \Psi_2$, где $\Psi_2 = \{y(t) \in C^1[0, T] : y(t) \in [y_2, \infty)\}$, т.е. при $y = y_2 + a_2$, где $0 \leq a_2(t) < \infty$, $a_2(t) \in C^1[0, T]$,

$$H(x, y, w) = w^a - p y_2 w - p a_2 w + y[aB(x) - I x] = w_2(w) + j_2(w) + y[aB(x) - I x],$$

где $w_2(w) = w^a \left[1 - a \left(\frac{w}{w_1} \right)^{1-a} \right]$, $j_2(w) = -p a_2 w$, проведя анализ функций

$w_2(w)$, $j_2(w)$, можно убедиться, что при любых фиксированных $x \in R_+^1$, $y \in \Psi_2$ функция $w_1(t) = p_1 B(x(t))$ доставляет максимум функции Гамильтона $H(x, y, w)$ на множестве $w(t) \in \bar{W}$. Так как $\Psi \cup \Psi_1 \cup \Psi_2 = \{y(t) \in C^1[0, T] : \text{Ran } y \in R_+^1\}$ рассмотрена вся область возможных значений сопряженной переменной $y(t)$ и фазовой переменной $x(t)$ и показано, что максимум функции Гамильтона (10) имеет место при любых фиксированных функциях y , $x \in R_+^1$ на управлениях

$$\left. \begin{aligned} w(t) &= p_2 B(x(t)), & \text{если } y(t) \in \Psi_1 \\ w(t) &= p [y(t)]^{-\frac{1}{1-a}}, & \text{если } y(t) \in \Psi \\ w(t) &= p_1 B(x(t)), & \text{если } y(t) \in \Psi_2 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Пусть $w^*(t)$ – оптимальное управление задачи (9), а $x^*(t)$, $y(t)$ – соответствующее ему решение Гамильтоновой системы (11). Тогда согласно основному равенству принципа максимума Понтрягина (*) соотношения (14) можно записать в виде (12). Теорема доказана.

Замечание. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $w(y) = p [y]^{-\frac{1}{1-a}}$ имеет пределы $\lim_{y \rightarrow y_1^+} w(y) = w_2$, $\lim_{y \rightarrow y_2^-} w(y) = w_1$, т.е.

оптимальное управление $w^*(t)$ – непрерывная функция в точках y_1 , y_2 и, следовательно, на всем множестве R_+^1 .

2. Решение краевой задачи оптимального управления

Пусть $w(t)$ – оптимальное управление динамикой региональной макроэкономики, определяемое зависимостями (12) теоремы 1, а $x(t)$, $y(t)$ – соответствующие ему решения системы (звездочки у w и x для простоты опустим):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= aB(x) - l x - p w & 0 \leq t \leq T \\ \frac{dy}{dt} &= -[aB'(x) - l] y \\ x(0) &= x_1, \quad x(T) = x_2 \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Введем следующие параметры модели: $a = q m B C_\infty$, $a_1 = (q - c_{w2}) m B C_\infty$, $a_2 = (q - c_{w1}) m B C_\infty$, $h = \frac{1}{a}$, $h_1 = \frac{a_1}{a}$, $h_2 = \frac{a_2}{a}$, $g = \frac{l}{a}$, $g_1 = \frac{l}{a_1}$, $g_2 = \frac{l}{a_2}$, $l = m + n + t$, $p = mB$, $s = \frac{1}{a} \left[\frac{a}{p^a} \right]^{\frac{1}{1-a}}$, $c_q = \frac{a}{p [q C_\infty]^{1-a}}$.

Тогда уравнения, определяющие оптимальные траектории $x(t)$, $y(t)$ задачи (9) можно записать в следующей форме $0 \leq t \leq T$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Здесь

$$F(x, y) = \begin{cases} a_1 (B(x) - g_1 x) & \text{при } y(t) \leq y_1(t) \\ a \left(B(x) - g x - s y^{-\frac{1}{1-a}} \right) & \text{при } y_1(t) < y(t) < y_2(t) \\ a_2 (B(x) - g_2 x) & \text{при } y(t) \geq y_2(t) \end{cases},$$

$$G(x, y) = a (g - B'(x)) y.$$

Нам понадобится также следующая, эквивалентная системе (16), система уравнений, в которой в качестве независимой переменной взята сопряженная переменная y , а в качестве функций – фазовая переменная x и время t

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= j(x, y) \\ \frac{dt}{dy} &= c(x, y) \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Здесь

$$j(x, y) = \begin{cases} h_1 \frac{B(x) - g_1 x}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & \text{при } y \leq y_1(x) \\ \frac{B(x) - g x - s y^{-\frac{1}{1-a}}}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & \text{при } y_1(x) < y < y_2(x) \\ h_2 \frac{B(x) - g_2 x}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & \text{при } y \geq y_2(x) \end{cases},$$

$$c(x, y) = \frac{h}{g - B'(x)} \frac{1}{y}.$$

Рассмотрим на положительном ортанте $R_+(y, x)$ сопряженной и фазовой переменной замкнутую область $\Omega(y, x) = \{y, x : y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$, где отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$ содержит в себе все возможные реальные состояния x_1, x_2 региональных экономических систем, а $y_{\min} = y(x_{\max})$, $y_{\max} = y(x_{\min})$ – соответствующие значения сопряженной переменной. Область Ω (рис. 1) назовем областью реальных состояний и реальных процессов региональных экономических систем при конечном горизонте планирования ($T < \infty$).

Рассмотрим в области Ω кривые

$$y_1(x) = \frac{c_2}{B^{1-a}(x)}, \quad y_2(x) = \frac{c_1}{B^{1-a}(x)}. \quad (18)$$

Так как $B(x)$ -функция имеет асимптоту $B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$, то $y_1(x), y_2(x)$ имеют асимптоты $y_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} c_2, y_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} c_1$. Для экономической системы, с исходными данными приведенными ранее, $c_1 = 8.63, c_2 = 5.76$. Кривые $y_1(x), y_2(x)$ делят область на три подобласти, рассмотренные в теореме 1. Для простоты изложения эти подобласти будем обозначать теми же символами Ψ_1, Ψ, Ψ_2 . В подобласти Ψ есть особая точка (y_s, x_s) , координаты которой определяются алгебраическими уравнениями

$$g - B'(x_s) = 0, \quad y_s = \frac{c_q}{[B(x_s) - g x_s]^{1-a}}.$$

Для рассматриваемого примера экономической системы $y_s = 7.0876, x_s = 1.5853$.

Введем в подобласти Ψ кривую $y_0(x)$, на которой производная $\frac{dx}{dy} = 0$ (точка (y_s, x_s) пока не рассматривается). Кривая $y_0(x)$ определяется уравнением

$$y_0(x) = \frac{c_q}{[B(x) - g x]^{1-a}}.$$

Из первого уравнения системы (16) видно, что на кривой $y_0(x)$ $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y_0} = 0$,

поэтому $y_0(x)$ – есть линия стационарных состояний экономической системы. Линия $y_0(x)$ сыграет ключевую роль в построении алгоритма решения задачи (9). На рис. 1 нанесена линия $y_0(x)$ для рассматриваемой в качестве примера экономической системы Хабаровского края.

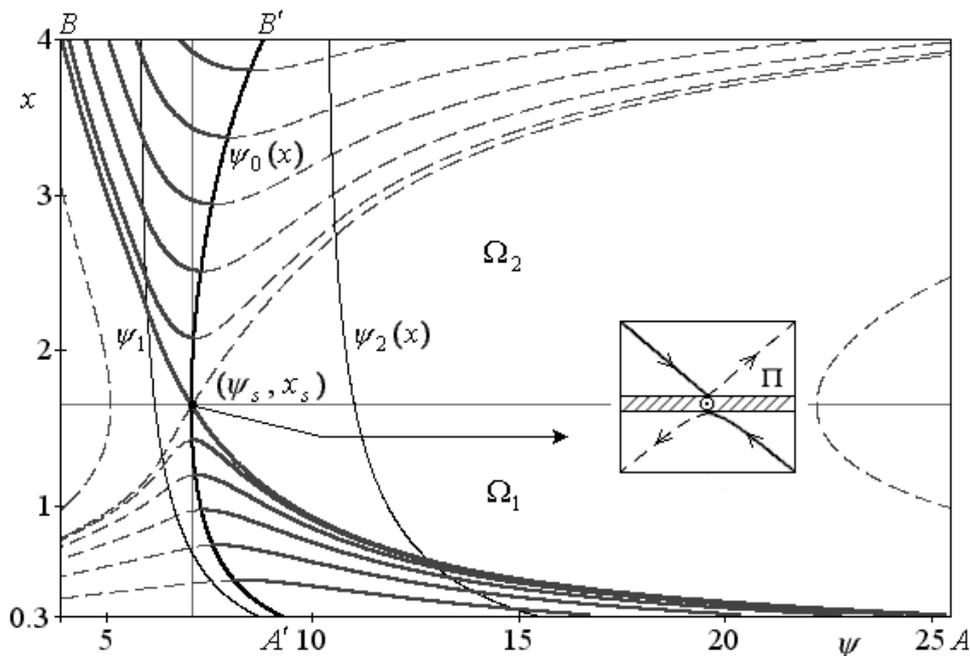


Рис. 1

Введем окружность с центром в точке (y_s, x_s) с малым радиусом h , обозначив ее O_{sh} (в наших расчетах $h = 10^{-5}$). Для простоты изложения будем считать, что точка A имеет такую координату y_{\max} , что интегральная кривая первого уравнения системы (17), исходящая из точки A (кривая a_1), касается снизу окружности O_{sh} ; а точка B имеет такую координату y_{\min} , что интегральная кривая, исходящая из точки B (кривая b_1), касается O_{sh} сверху.

В силу важности знания поведения интегральных кривых в области Ω для построения алгоритма решения задачи оптимального управления (9) на рис. 1 показаны интегральные кривые $\{a_i\}$, исходящие из промежутка

$A'A = \{y_0(x_{\min}) < y \leq y_{\max}, x = x_{\min}\}$, и кривые $\{b_i\}$, исходящие из промежутка $BB' = \{y_{\min} \leq y < y_0(x_{\max}), x = x_{\max}\}$, посчитанные на ЭВМ для рассматриваемого примера экономической системы решением системы (16) эквивалентной системе (17) для начальных данных x_1, y_1 из $A'A, BB'$ методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности [4] (серия расчетов).

Рассмотрим области $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$, разделенные горизонтальной полосой П шириной $2h$; границы полосы касаются круга O_{sh} (рис. 1).

Лемма 1. Интегральные кривые системы (17), исходящие из промежутков $A'A, BB'$, образуют два семейства $\{a_{i_1}\}, \{b_{i_2}\}$; $\{a_{i_1}\}$ расположенных в Ω_1 , $\{b_{i_2}\}$ – в Ω_2 . Ни одна кривая семейств $\{a_{i_1}\}, \{b_{i_2}\}$ не пересекает полосу П. Здесь $i_1 = \overline{1, n_1}, i_2 = \overline{1, n_2}, n_1, n_2$ – любые целые числа.

Справедливость леммы следует из рис. 1.

Обозначим через Ω_1^+ часть области Ω_1 , ограниченную интегральной кривой a_1 (проходящей через точку A), кривой $y_0(x)$ и отрезком $A'A$, а через Ω_2^- – часть области Ω_2 , ограниченную интегральной кривой b_1 (проходящей через точку B), кривой $y_0(x)$ и отрезком BB' (рис. 2). Обозначим часть кривой $y_0(x)$, лежащей в области Ω_1^+ , через $y_0^+(x)$, а в области Ω_2^- – через $y_0^-(x)$. Обозначим интегральные кривые $\{a_{i_1}\}$, лежащие в Ω_1^+ через $\{a_{i_1}^+\}$, а интегральные кривые $\{b_{i_2}\}$, лежащие в Ω_2^- через $\{b_{i_2}^-\}$.

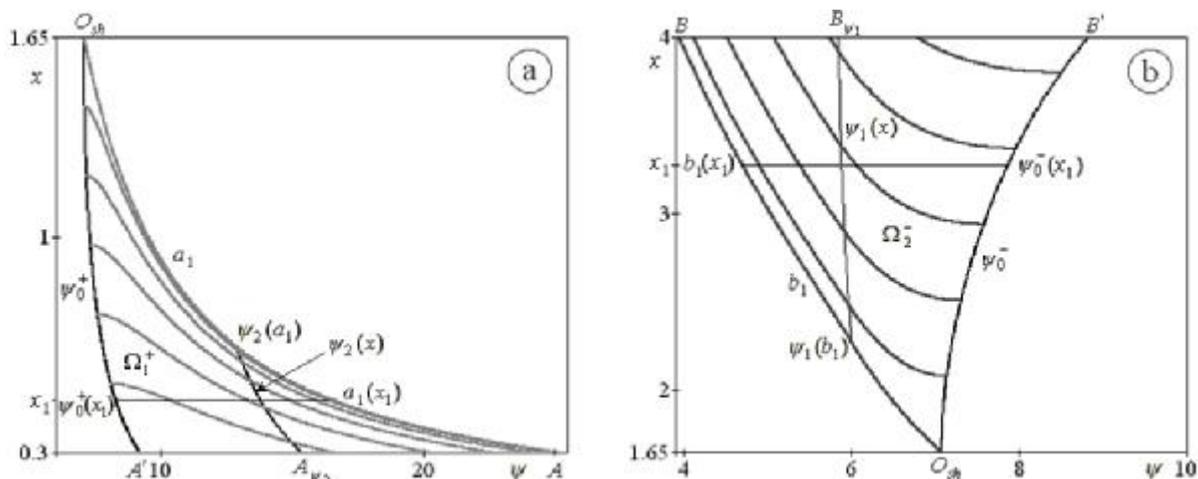


Рис. 2

Лемма 2. Интегральные кривые $\{a_{i_1}^+\} \subset \Omega_1^+$ не пересекаются между собой, интегральные кривые $\{b_{i_2}^-\} \subset \Omega_2^-$ также не пересекаются между собой. Каждой точке x_{i_1} промежутка $A'A$ кривые $\{a_{i_1}^+\}$ ставят в соответствие только одну

точку кривой $y_0^+(x)$. Каждой точке x_{i_2} промежутка BB' кривые $\{b_{i_2}^-\}$ ставят в соответствие только одну точку кривой $y_0^-(x)$.

В справедливости первой части леммы 2 можно убедиться, рассмотрев задачу Коши:

$$\frac{dx}{dy} = \left\{ \begin{array}{ll} h_2 \frac{B(x) - g_2 x}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & y_2(x) \leq y \\ \frac{B(x) - g x - s y^{-\frac{1}{1-a}}}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & y_0^+(x) \leq y < y_2(x) \end{array} \right. \quad (y, x) \in \Omega_1^+ \quad (19)$$

$$x(x_{i_1}) = x_{\min}, \quad x_{i_1} \in A'A$$

которая определяет интегральные кривые $\{a_{i_1}^+\}$. Существование глобального решения задачи Коши (19) в области Ω_1^+ следует из леммы Вишика-Дубинского [8] (стр. 67 – 68), а из второй части теоремы 2 Л.С. Понтрягина [9] (с. 168 – 169) следует единственность глобального решения задачи Коши (14) в области Ω_1^+ .

Аналогично, рассмотрев задачу Коши:

$$\frac{dx}{dy} = \left\{ \begin{array}{ll} h_1 \frac{B(x) - g_1 x}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & y_1(x) \geq y \\ \frac{B(x) - g x - s y^{-\frac{1}{1-a}}}{g - B'(x)} \frac{1}{y} & y_0^-(x) \geq y > y_1(x) \end{array} \right. \quad (y, x) \in \Omega_2^-$$

$$x(x_{i_2}) = x_{\max}, \quad x_{i_2} \in BB'$$

которая определяет интегральные кривые $\{b_{i_2}^-\}$, убеждаемся в справедливости второй части леммы 2.

Пусть x_1, x_2 – точки начального и конечного состояния экономической системы. Возможны два случая. Случай А: $x_{\min} < x_1 < x_2 < x_s$ (рис. 3а). В этом случае согласно леммам 1, 2 через сечения x_1, x_2 плоскости (x, y) проходят интегральные кривые (экстремали) $\{a_i\} \in \Omega_1^+, i = \overline{1, n_1}$ (n_1 – любое целое число). Экстремаль a_1 касается круга O_{sh} , а экстремаль a_{n_1} в сечении $x = x_2$ имеет общую точку с кривой $y_0(x)$. Очевидно, что все экстремали семейства $\{a_i\}$, проходящие через сечения $x = x_1$ и $x = x_2$ находятся между экстремальми a_1, a_{n_1} .

В случае В: $x_s < x_2 < x_1 < x_{\max}$ (рис. 3б) через сечения x_1, x_2 плоскости (x, y) проходят интегральные кривые (экстремали) $\{b_i\} \in \Omega_2^-, i = \overline{1, n_2}$ (n_2 – любое

целое число). Экстремаль b_1 касается круга O_{sh} , b_{n_2} – в сечении $x = x_2$ имеет общую точку с кривой $y_0(x)$. Отметим также, что все экстремали, проходящие через сечения $x = x_1$ и $x = x_2$, находятся между экстремальями b_1, b_{n_2} . Значения x_1, x_2 случая А и случая В совершенно разные.

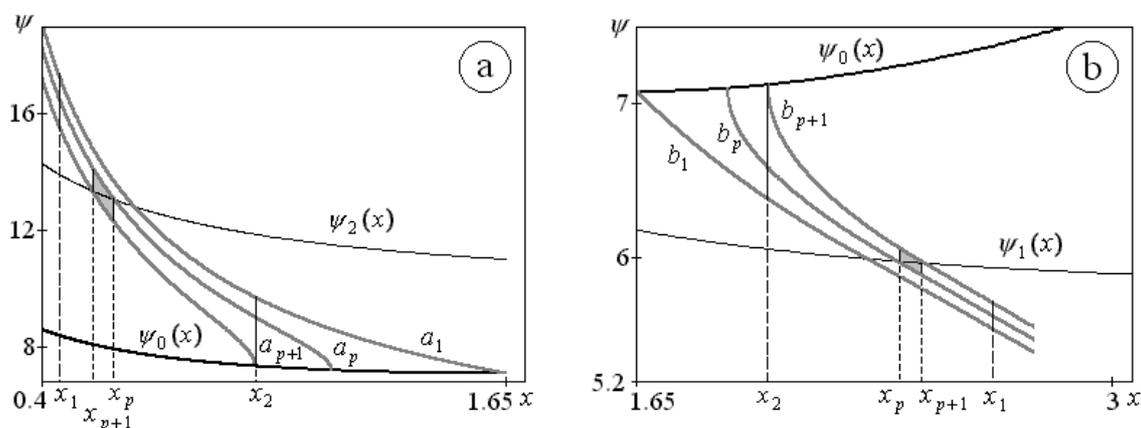


Рис. 3

Пусть $J_1^1, \dots, J_{n_1}^1$ – значения интеграла благосостояния на экстремальных a_1, \dots, a_{n_1} , а $T_1^1, \dots, T_{n_1}^1$ – времена перехода из состояния x_1 в состояние x_2 по экстремальям a_1, \dots, a_{n_1} . Обозначим через $J_1^2, \dots, J_{n_2}^2$ и $T_1^2, \dots, T_{n_2}^2$ – интегралы благосостояния, времена перехода на экстремальных b_1, \dots, b_{n_2} .

Теорема 2. Рассмотрим экономический процесс, описываемый системой уравнений (17).

Рассмотрим $x_1, x_2 \in \Omega_1^+$ – начальное и конечное состояния экономической системы, $x_{\min} < x_1 < x_2 < x_s$ (случай А).

Рассмотрим также $x_1, x_2 \in \Omega_2^-$ – начальное и конечное состояние системы, $x_s < x_2 < x_1 < x_{\max}$ (случай В). Тогда: время перехода из состояния x_1 в состояние x_2 , $x_1, x_2 \in \Omega_1^+$, по экстремальям a_1, \dots, a_{n_1} и соответствующие значения интеграла благосостояния, а также время перехода из состояния x_1 в состояние x_2 , $x_1, x_2 \in \Omega_2^-$, по экстремальям b_1, \dots, b_{n_2} и соответствующие значения интеграла благосостояния удовлетворяют неравенствам

$$T_{n_d}^d > \dots > T_2^d > T_1^d, \quad (20)$$

$$J_{n_d}^d > \dots > J_2^d > J_1^d, \quad (21)$$

где $d = 1$ (для случая А), $d = 2$ (для случая В).

Доказательство теоремы заключается в рассмотрении двух произвольных соседних экстремалей a_p, a_{p+1} для случая А, двух произвольных соседних экстремалей b_p, b_{p+1} для случая В и установлении вдоль экстремалей неравенств $T_{p+1}^1 > T_p^1, J_{p+1}^1 > J_p^1$, и $T_{p+1}^2 > T_p^2, J_{p+1}^2 > J_p^2$. Полное доказательство теоремы 2 изложено в работе авторов [3].

Экономический процесс протекает во времени из состояния (y_1, x_1) в состояние (y_2, x_2) . Задача, определяющая изменение времени, есть

$$\frac{dt}{dy} = \frac{h}{g - B'(x)} \frac{1}{y}, \quad t(y_1) = 0.$$

В случае $x_1 < x_2 < x_s$ правая часть < 0 и $dy < 0$, поэтому время изменяется от $t = 0$ до $t = T$. Аналогично, при $x_1 > x_2 > x_s$ время также изменяется от 0 до T . В результате анализа различных подходов к решению краевой задачи оптимального управления, оказалось, что задача довольно просто решается, если рассмотреть процесс от состояния (y_2, x_2) к состоянию (y_1, x_1) , т.е. за “начальный момент” времени взять горизонт планирования, точку (y_2, x_2) , а за конечный – точку (y_1, x_1) . Переменную времени этого процесса обозначим через q . Состояние системы (y_2, x_2) соответствует $q = 0$, а физически истинное начальное состояние (y_1, x_1) становится прошлым, соответствующим времени $q = -T$. Поскольку $q = t - T$, то задача для q имеет вид

$$\frac{dq}{dy} = \frac{h}{g - B'(x)} \frac{1}{y}, \quad q(y_2) = 0.$$

Теорема 3. Рассмотрим экономический процесс, описываемый системой уравнений (17). Пусть x_1, x_2 – точки начального и конечного состояния системы; $x_1, x_2 \in \Omega$. Тогда решение задачи оптимального управления определяется задачей Коши:

А) при $x_{\min} \leq x_1 < x_2 < x_s$

$$\left. \begin{aligned} & x^*(y) \leq x_2, \quad q(y) \leq 0 \\ & \frac{dx^*}{dy} = \begin{cases} h_2 \frac{B(x^*) - g_2 x^*}{g - B'(x^*)} \frac{1}{y} & \text{при } y_2(x^*) \leq y \\ \frac{B(x^*) - g x^* - s y^{-\frac{1}{1-a}}}{g - B'(x^*)} \frac{1}{y} & \text{при } y_0(x_2) \leq y < y_2(x^*) \end{cases} \\ & \frac{dq}{dy} = \frac{h}{g - B'(x^*)} \frac{1}{y} \end{aligned} \right\} (22)$$

с начальными условиями

$$y_2 = y_0(x_2) = \frac{c_q}{[B(x_2) - g x_2]^{1-a}}, \quad x(y_2) = x_2, \quad q(y_2) = 0. \quad (23)$$

В) при $x_s < x_2 < x_1 \leq x_{\max}$ – задачей Коши:

$$\left. \begin{aligned} x^*(y) &\geq x_2, & q(y) &\leq 0 \\ \frac{dx^*}{dy} &= \begin{cases} h_1 \frac{B(x^*) - g_1 x^*}{g - B'(x^*)} \frac{1}{y} & \text{при } y_1(x^*) \geq y \\ \frac{B(x^*) - g x^* - s y^{-\frac{1}{1-a}}}{g - B'(x^*)} \frac{1}{y} & \text{при } y_0(x_2) \geq y > y_1(x^*) \end{cases} \\ \frac{dq}{dy} &= \frac{h}{g - B'(x^*)} \frac{1}{y} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

с начальными условиями (23).

Доказательство. Рассмотрим случай А. Пусть $x_1 < x_2$, $x_2 < x_s$. Тогда согласно лемме 1, оптимальная траектория находится среди интегральных кривых семейства $\{a_{i_1}\} \subset \Omega_1$ (рис. 2а). Если $x_1 > x_{\min}$, то по заданному начальному состоянию x_1 строим в области Ω_1^+ промежуток $(j_0^+(x_1), a_1(x_1)]$, который параллелен AA' (рис. 2а). Область $\Omega_1^+(x_1) \subset \Omega_1^+$, интегральные кривые $\{a_{i_1}\} \subset \Omega_1^+(x_1)$ удовлетворяют условиям леммы 2, согласно которой для любого x_1 , $x_1 < x_2$, существует и притом единственная интегральная кривая $a \in \{a_{i_1}\}$, соединяющая точки x_1 и x_2 , $x_2 \in y_0^+(x)$. Согласно теореме 2 интеграл благосостояния будет наибольшим на экстремали a , содержащей точку (y_2, x_2) . Координаты точки $(y_2, x_2) \in y_0^+(x)$ известны ($y_2 = \frac{c_q}{[B(x_2) - g x_2]^{1-a}}$), поэтому решая из точки (y_2, x_2) задачу Коши (22), (23), находим $x^*(y)$, $q(y)$. Горизонт планирования T в момент окончания решения задачи Коши становится известным – это значение со знаком минус решения q второго уравнения системы (22) в момент, когда $x^*(y)$ становится равной x_1 . Учитывая, что $t = q + T$ в момент окончания решения задачи Коши (22), (23) становится известной зависимость $t = f(y)$. Функция $t = f(y)$ строго монотонно убывающая, следовательно $\exists f^{-1}$ такая, что $y = f^{-1}(t)$ или $y = y(t)$. Далее имеем $x^* = x^*(y(t))$ или $x^* = x^*(t)$. В заключении, используя установленные теоремой 1 зависимости (12), вычисляем оптимальное управление $w^*(t)$. Таким образом, решение задачи Коши (22), (23) определяет оптимальные траектории $x^* = x^*(t)$, $y = y(t)$, оптимальное управление $w^*(t) \forall t, t \in [0, T]$.

Во втором случае (В), когда $x_s < x_2 < x_1$, согласно лемме 1 оптимальная

траектория находится среди семейства интегральных кривых $\{b_{i_2}\} \subset \Omega_2$ (рис. 2b). Если $x_1 < x_{\max}$, то по заданному начальному состоянию x_1 строим в области Ω_2^- промежуток $(b_1(x_1), y_0^-(x_1)]$, который параллелен BB' (рис. 2b). Область $\Omega_2^-(x_1) \subset \Omega_2^-$, интегральные кривые на $\Omega_2^-(x_1)$ удовлетворяют условиям леммы 2, теоремы 2, поэтому повторяя рассуждения случая А, применяя в заключении зависимости (12) теоремы 1 приходим к выводу, что решение задачи оптимального управления для случая В определяется задачей Коши (24), (23). Теорема доказана.

Замечание. Численное решение задач Коши (22), (23) и (24), (23) на ЭВМ проводится методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. На каждом шаге процедуры Рунге-Кутты считается также оптимальное управление w^* и слагаемое в интеграл благосостояния. В момент завершения решения задачи Коши вычисляется временная последовательность $\{t_n\} = T + \{q_{N-n}\}$ ($n = \overline{0, N}$), ($0 \leq \{t_n\} \leq T$).

3. Численные исследования

В качестве подтверждения работоспособности разработанного алгоритма решения задачи оптимального управления рассмотрим некоторые результаты расчетов оптимального управления региональной экономикой (на примере Хабаровского края) организаторами производственного процесса.

Параметры зависимости (5), определяющие область допустимых значений функции управления, приняты равными $p_1 = 1.5256$, $p_2 = 10.5021$.

Вычисления параметров систем дифференциальных уравнений (16), (17) дали значения: $a = 0.6558$, $a_1 = 0.0257$, $a_2 = 0.5643$, $g = 0.1914$, $g_1 = 4.8854$, $g_2 = 0.2224$, $s = 329.507$, $p = 3601.6$, $h_1 = 0.0392$, $h_2 = 0.8604$, $c_1 = 10.2783$, $c_2 = 5.7619$, $c_q = 5.6932$.

Рассмотрим результаты расчетов оптимального управления и соответствующих ему оптимальных траекторий для случая А: $x_{\min} \leq x_1 < x_2 < x_s$.

Исходные данные вариантов x_1 , x_2 , рассчитанные значения сопряженной переменной y_1 , y_2 , интеграла благосостояния, времени перехода из состояния x_1 в состояние x_2 приведены в таблице.

Данные расчетов

Вариант	x_1	x_2	y_1	y_2	J	T
1	0.33	1.585304	25.810150	7.087574	111.48	39.17
2	0.33	1.4	25.576685	7.103178	19.24	9.92
3	0.33	1.2	24.728196	7.161670	12.84	7.44
4	0.33	1.0	23.136148	7.279479	9.05	5.74
5	0.33	0.8	20.656091	7.487083	6.19	4.25

На рис. 4 в плоскости y, x показаны оптимальные траектории $x^*(y)$ между начальным (y_1, x_1) и конечным (y_2, x_2) состояниями экономической системы, полученные решением задачи (22), (23). Номера кривых соответствуют номерам вариантов таблице.

На рис. 5 показаны оптимальные траектории как функции времени $x^*(t)$ между начальным и конечным состояниями системы. Как следует из таблицы и кривых рис. 5 конечное состояние достигается за времена $T_1 = 39.17$ года, $T_2 = 9.92$ лет, $T_3 = 7.44$ года, $T_4 = 5.74$ года, $T_5 = 4.25$ года.

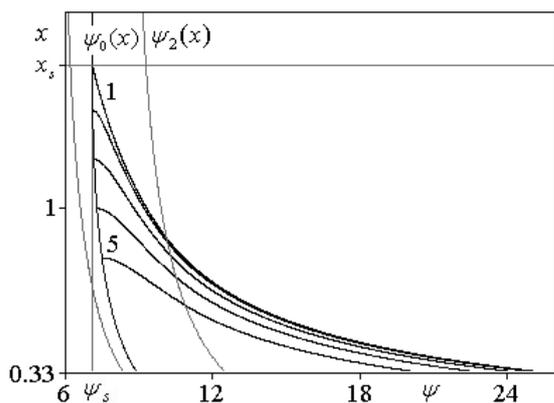


Рис. 4

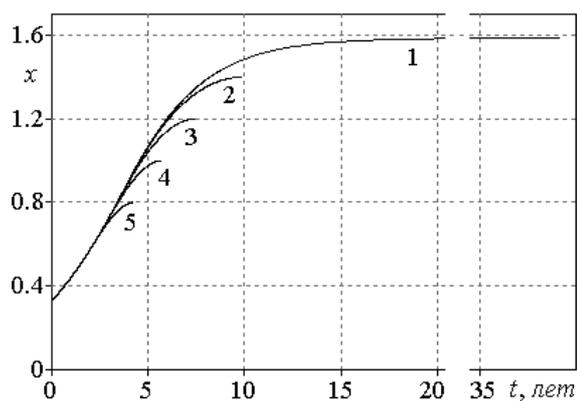


Рис. 5

На рис. 6 представлены оптимальные траектории сопряженной переменной $y(t)$ между начальным и конечным состояниями системы.

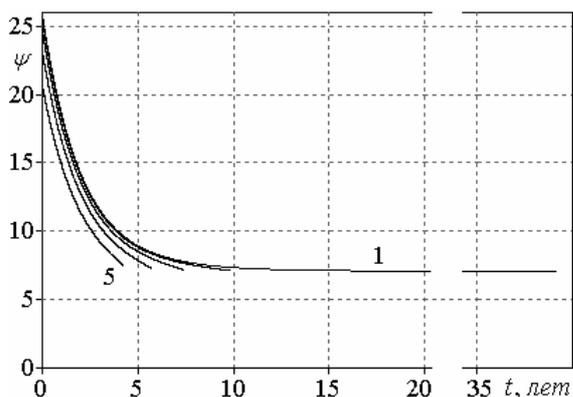


Рис. 6

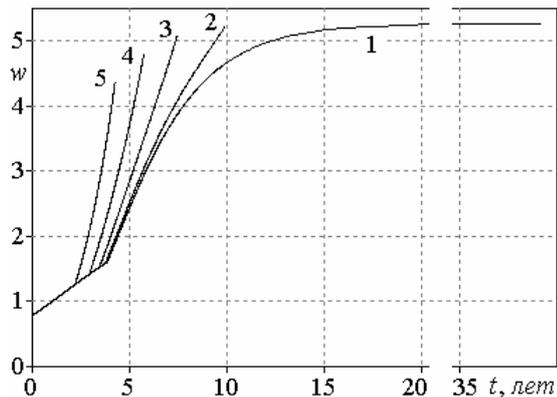


Рис. 7

На рис. 7 представлены оптимальные управления $w^*(t)$ для вариантов 1–5 таблицы, соответственно кривыми 1–5.

Из анализа оптимальных кривых $x^*(t)$ рис. 5 можно отметить оптимальные траектории, оптимальные управления $w^*(t)$ (см. рис. 7) имеют два характерных участка:

– I-ый участок соответствует оптимальному потреблению, находящемуся на

предельно низком уровне (т. к. $y(t) \geq y_2(x)$), определяемом фазовой переменной $x^*(t)$ в соответствии с зависимостью $w^*(t) = p_1 B(x^*(t))$ (см. соотношения (12) теоремы 1, рис. 7), при этом в плоскости y, x первый участок оптимальных траекторий $x^*(y)$ находится в области Ψ_2 (см. рис. 4);

– II-ой участок оптимальных траекторий $x^*(t)$ характерен тем, что в плоскости y, x он находится в области Ψ ($y_0(x) \leq y(t) < y_2(x)$), при этом оптимальное потребление $w^*(t)$ резко увеличивается (см. рис. 7), его величина определяется сопряженной переменной $y(t)$ согласно зависимости:

$w^*(t) = p y^{-\frac{1}{1-a}}(t)$. Из анализа кривых $w^*(t)$ рис. 7 наглядно видно, что решающий вклад в значение интеграла благосостояния на оптимальных траекториях происходит на втором участке.

Библиографические ссылки

1. Булгаков В. К., Стригунов В. В. Модель и исследование макроэкономики региона на основе производственной В-функции // Вестник ТОГУ. 2005. № 1.

2. Булгаков В. К., Булгаков О. В. Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России // Экономика и мат. методы. Т. 42. № 1. 2006.

3. Булгаков В. К., Стригунов В. В. Исследование одной математической модели макроэкономики региона РФ, решение задачи оптимального управления: Препринт ВЦ ДВО РАН. Хабаровск, 2006.

4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука. 1978.

5. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука. 1988.

6. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 110, №1.

7. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976.

8. Дубинский Ю.А. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка // Успехи математических наук. М.: Наука, 1968. Т. 23, вып. 1.

9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.